Hausdorff-Maß und -Dimension

Tobias Krämer

7. November 2006

Übersicht

- **Allgemeines zu Maß und Dimension**
- **Hausdorff-Maß**
- **Hausdorff-Dimension**
- **Beispiele**

Was ist ein Maß? (allgemein)

Allgemeines

Maße:

Vergleichsgrößen zur Größen- und Mengenbestimmung von Gegenständen, Länge, Rauminhalte, Gewichte, ...

Was ist ein Maß? (mathematisch)

Allgemeines

Borelmengen in $\mathbb{R}^n$:

Offene und abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Borelmengen.

Desweiteren ist jede abzählbare Vereinigung und jeder abzählbare Durchschnitt von Borelmengen ebenfalls eine Borelmenge.

Allgemeines

Definition eines Maß:

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ heißt Maß auf $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(3) $\{A_i\}$ eine abzählbare Folge von Mengen, dann gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Und

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

wenn die $\{A_i\}$ paarweise disjunkte Borelmengen sind.

Allgemeines

Beispiele für Maße

Im folgenden definiert man $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$:

- Zählmaß μ:

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Punkte in } A, \text{ falls } |A| < \infty \\ \infty \quad , \text{ anderenfalls.} \end{cases}$$

- Sei $a \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt.

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & a \notin A \\ 1, & a \in A \end{cases}$$

Allgemeines

- Durch das Lebesgue-Maß ist ebenfalls ein Maß definiert.

  Sei $A = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$,

  $$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

  das n-dimensionale Volumen eines Rechtecks.

  $$\mathcal{L}^n(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}$$

  ist dann das n-dimensionale Lebesgue-Maß von $B \subset \mathbb{R}^n$. A_i seien analog zu A definiert.

Was ist eine Dimension? (allgemein)

Allgemeines

Synonym für Ausdehnung, Ausmaß.

Was ist eine Dimension? (mathematisch)

Allgemeines

Es gibt verschiedene mathematisch definierte Dimensionen.

Beispiel:

Dimension eines Vektorraums
$=$ Anzahl der Vektoren einer Basis des Vektorraums

Allgemeines

Maße und Dimensionen sind also Möglichkeiten Mengen nach gewissen Gesichtspunkten zu sortieren bzw. zu unterscheiden.

Allgemeines

Wir betrachten noch kurz:

Unter einer **Kurve** Γ in $\mathbb{R}^n$ versteht man die zu einem **Weg** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gehörige Punktmenge $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. γ sei hierbei stetig differenzierbar.

$$\text{Länge}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Allgemeines

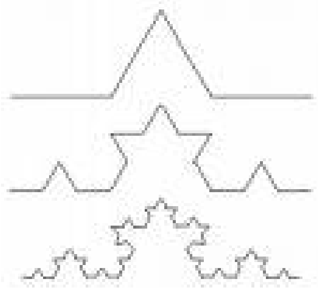
Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ nicht-leer, kompakt, Jordan-meßbar.

Unter einer **Fläche** Φ mit Parameterbereich K versteht man die Einschränkung $\Phi|K$ einer C^1-Abbildung $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf K. M ist eine K enthaltende offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Das Bild von Φ wird dann als **Flächenstück** bezeichnet.

$$\text{Flächeninhalt}(\Phi) = \int_K |\Phi_u \times \Phi_v| d(u, v).$$

Allgemeines

Problem/Motivation: Die Schneeflockenkurve



Länge(F)$=\infty$, Fläche(F)$=0$.

Das Hausdorffmaß

Hausdorff-Maße

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$|U| := sup \{|x - y| : x, y \in U\} .$$

$|U|$ heißt der Durchmesser von U.

Weiter sei $F \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und $\{U_i\}$ eine Folge abzählbarer Mengen mit

$$|U_i| \leq \delta \qquad \text{und} \qquad F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i .$$

$\{U_i\}$ heißt dann δ-Überdeckung von F.

Hausdorff-Maße

Wir definieren nun

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}.$$

Hierbei sei $\delta > 0$ und $s \geq 0$.

Hausdorff-Maße

Anschaulich bedeutet dies

$\mathcal{H}_\delta^s(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}.$

Hausdorff-Maße

Wir definieren nun

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \searrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\} .$$

$\mathcal{H}^s(F)$ heißt s-**dimensionales Hausdorff-Maß** von F.

Hausdorff-Maße

$$\mathcal{H}^0(F) = \text{ Anzahl der Punkte in } F$$
$$\mathcal{H}^1(F) = \text{Länge einer Kurve } F$$

Zusammenhang zwischen Lebesgue- und Hausdorff-Maß für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}^s(F) = c_n^{-1} vol^n(F), \text{ wenn } F \subset \mathbb{R}^n$$

Dabei ist $vol^n(F)$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß von F und c_n das Volumen der n-dim. Kugel mit Durchmesser 1.

Hausdorff-Maße

Skalierungseigenschaft:

Sei S eine Ähnlichkeitstransformation mit Skalierungsfaktor $\lambda > 0$.
Für $F \subset \mathbb{R}^n$ gilt dann:

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Satz:

Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ und $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung derart, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}(x, y \in F)\,,$$

wobei $c > 0$ eine Konstante sei und $\alpha > 0$. Dann gilt für jedes $s \geq 0$:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F).$$

Hausdorff-Maße sind auch

translations- und **rotationsinvariant**.

Die Hausdorff-Dimension

Hausdorff-Dimension

Sei $t > s$, $\{U_i\}$ eine δ-Überdeckung von $F \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$

Also

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

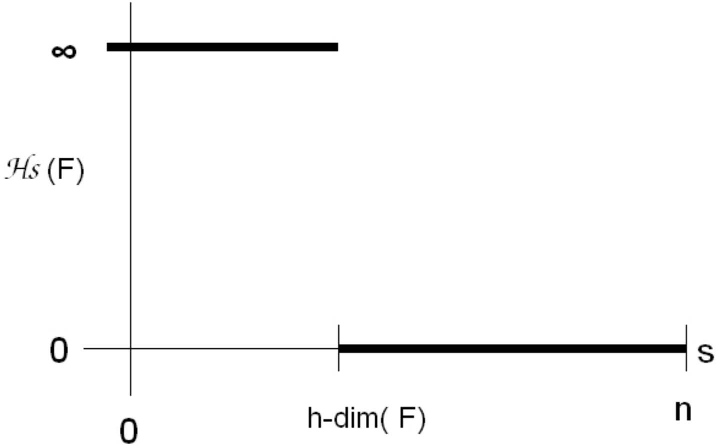
.

Der Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert dann

$$\mathcal{H}^s(F) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0, t > s.$$

$$\mathcal{H}^t(F) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(F) = \infty, t > s.$$

Hausdorff-Dimension



Hausdorff-Dimension

Formal:

$$\dim_H(F) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

heißt **Hausdorff-Dimension von** F.

Hausdorff-Dimension

Für $s = dim_H(A)$ ist nur selten sofort eine Aussage möglich. Es können alle drei Fälle $0, 0 < \mathcal{H}(A) < \infty, +\infty$ eintreten.

Umgekehrt folgt aber aus $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, dass $dim_H(A) = s$.

Hausdorff-Dimension

Es gilt also

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq s < dim_H(F) \\ 0, & s > dim_H(F) \end{cases}$$

Hausdorff-Dimension

Beispiel:

Sei F eine flache Scheibe mit Radius 1 in $\mathbb{R}^3$.
Dann ist

$$\mathcal{H}^1(F) = \text{Länge}(F) = \infty,$$

$$0 < \mathcal{H}^2(F) = (4/\pi)\ \text{Fläche}\ (F) < \infty,$$

$$\mathcal{H}^3(F) = (6/\pi)\ \text{Vol}(F) = 0.$$

Also ist die $dim_H(F) = 2$ und $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ für $s < 2$ und $\mathcal{H}^s(F) = 0$ für $s > 2$.

Hausdorff-Dimension

Eigenschaften von $dim_H(F)$:

- Monotonie
- Stabilität gegenüber abzählbaren Vereinigungen
- abzählbare Mengen
- offene Mengen

Hausdorff-Dimension

Andere Definitionsmöglichkeiten der Hausdorff-Dimension:

Sei

$$\mathcal{B}^s_\delta(F) = \text{ inf}\left\{\sum |B_i|^s : \{B_i\}\ \delta\text{-Überdeckung von F durch Kugeln}\right\}.$$

Dann erhalten wir ein Maß

$$\mathcal{B}^s(F) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{B}^s_\delta(F)$$

und eine 'Dimension', an welcher $\mathcal{B}^s(F)$ von ∞ auf 0 springt. Analog sind offene, geschlossene, kompakte, 'andere' Mengen möglich.

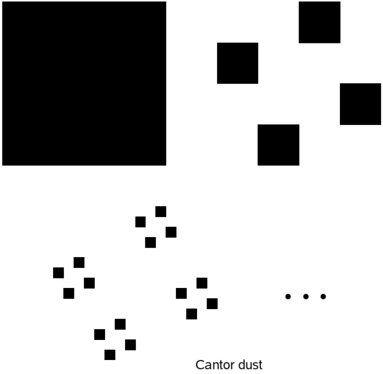
Hausdorff-Dimension

Anstelle von $|U_i|^s$ kann man auch andere monoton wachsende, stetige, nicht-negative Funktionen von $|U_i|$ verwenden. Häufig erhält man 'feinere' Informationen über die Eigenschaften einer Menge.

Beispiele

Beispiele

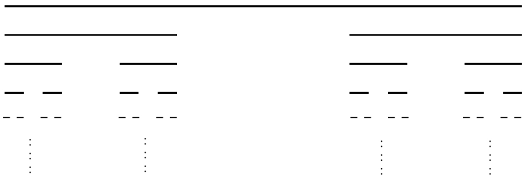
Beispiel 1 - Cantorstaub



Diese Menge hat $dim_H(F) = 1$, denn $1 \leq \mathcal{H}^1(F) \leq \sqrt(2)$.

Beispiele

Beispiel 2 - Cantormenge



Middle third cantor set

Diese Menge hat $dim_H(F) = \log(2)/\log(3)$ und $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.