Schnitte von Fraktalen

Matthias Schmid

matthias.schmid@uni-ulm.de

12. Dezember 2006

ulm university universität ulm

Eingliederung

Bisher im Seminar betrachtet:

- Hausdorff-Dimension
- Lokale Struktur von Fraktalen
- Projektionen und Produkte von Fraktalen

Eingliederung

Bisher im Seminar betrachtet:

- Hausdorff-Dimension
- Lokale Struktur von Fraktalen
- Projektionen und Produkte von Fraktalen

Nun:

- Schnitte von Fraktalen

Vorwort

Der Schnitt zweier Fraktale ist oft wieder ein Fraktal, im Allgemeinen Fall lässt sich jedoch nichts über dessen Dimension aussagen.

Beispiel:
F abgeschlossen, F_c kongruente Kopie von F.
Nun ist:

- $dim_H(F \cap F_c) = dim_H(F)$ (z.B. für $F = F_c$)
- aber $dim_H(F \cap F_c) = 0$ wenn F, F_c disjunkt

Vorwort

Der Schnitt zweier Fraktale ist oft wieder ein Fraktal, im Allgemeinen Fall lässt sich jedoch nichts über dessen Dimension aussagen.

Beispiel:
F abgeschlossen, F_c kongruente Kopie von F.
Nun ist:

- $dim_H(F \cap F_c) = dim_H(F)$ (z.B. für $F = F_c$)
- aber $dim_H(F \cap F_c) = 0$ wenn F, F_c disjunkt

Wenn F_c eine "typische"kongruente Kopie ist, lässt sich etwas Allgemeines aussagen.

Bewegung

Definiere

Translation Verschiebung um einen Vektor y, d.h.: $\tau_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto x + y$.

Rotation Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix A mit $\det A = 1$

Bewegung Komposition einer Rotation und einer Translation

D.h. eine Bewegung ist eine Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $x \mapsto Ax + y$ mit A orthogonal und $\det A = 1$.

Isometrie

Definiere

Orth. Abb. Eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiße *orthogonale Abbildung*, falls $|g(x) - g(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
D.h. es sind nur Rotationen und Spiegelungen erlaubt.

Isometrie Komposition einer orthogonalen Abbildung und einer Translation

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ besteht aus allen linearen Abbildungen g. Eine Isometrie ist also eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei $f = \tau_z \circ g$ für $z \in \mathbb{R}^n$, $g \in O(n)$.

Maß von Bewegungen

Eine Bewegung σ in $\mathbb{R}^2$ überführt jede Menge E in eine kongruente Kopie $\sigma(E)$ (ohne Spiegelung).
Diese Bewegung kann parametrisiert werden mit 3 Koordinaten $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)$ wobei der Ursprung nach (x, y) verschoben wird und um den Drehwinkel θ gedreht wird.

Maß von Bewegungen (2)

Anzahl Drehwinkel im $\mathbb{R}^n$:
Im $\mathbb{R}^2$ gibt es einen Drehwinkel: auf der Ebene x_1, x_2.
Im $\mathbb{R}^3$ gibt es Drehwinkel auf den 3 Ebenen $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_3)$.
Im $\mathbb{R}^n$ gibt es also $n * (n-1)/2$ Drehwinkel.

Maß von Bewegungen (3)

Jeder Bewegung im $\mathbb{R}^n$ kann ein eindeutiger Wert in $\mathbb{R}^n \times [0, 2\pi)^{\frac{n^2-n}{2}}$ zugeordnet werden.
Diese Abbildung nennen wir $\mathcal{J}$. Auf der Menge $\mathcal{B}$ der Bewegungen kann wie folgt ein natürliches Maß definiert werden:

$$\mu(A) := \lambda(\mathcal{J}(A)), \text{ so dass } \forall A \in \mathcal{B} : \mathcal{J}(A) \text{ Borel-messbar}$$

Motivation

Im $\mathbb{R}^3$ schneiden sich zwei Ebenen $E, F \subset \mathbb{R}^3$

- in einer Ebene, falls $E = F$
- gar nicht, falls $E \,||\, F$
- und in einer Geraden, sonst.

Motivation

Der Fall, dass sich zwei Ebenen in einer Geraden schneiden, tritt häufig auf.
Man kann eine Dimensionsformel angeben:

$$\dim(E \cap \sigma(F)) = \dim E + \dim F - n$$

für eine Menge σ mit positivem Maß.
Im Beispiel gilt:

$$\dim(E \cap \sigma(F)) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Motivation

Der Fall, dass sich zwei Ebenen in einer Geraden schneiden, tritt häufig auf.
Man kann eine Dimensionsformel angeben:

$$\dim(E \cap \sigma(F)) = \dim E + \dim F - n$$

für eine Menge σ mit positivem Maß.
Im Beispiel gilt:

$$\dim(E \cap \sigma(F)) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Gibt es eine solche Dimensionsformel auch für allgemeinere Mengen?

Schnitte von Fraktalen

Seien E,F Borelmengen aus $\mathbb{R}^n$. Man könnte auf eine Dimensionsformel wie

$$\dim_H(E \cap f(F)) = max\{0, \dim_H E + \dim_H F - n\}$$

hoffen.
Diese gilt allerdings nur unter bestimmen Voraussetzungen.
Wir zeigen ($\leq$) mit $f = \tau_z$, d.h. die Translationen im $\mathbb{R}^n$ und ($\geq$) mit $f = (\tau_z \circ g)$, d.h. die Isometrien im $\mathbb{R}^n$.

Satz (1)

Seien E und F Borelmengen aus $\mathbb{R}^n$*. Dann gilt*

$$\dim_H(E \cap (F + x)) \leq \max\{0, \dim_H(E \times F) - n\} \tag{1}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

Beweis

Siehe Tafel.

Verallgemeinerung

Wie im letzten Vortrag gesehen gilt:

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$$

falls $\dim_H(E) = \overline{\dim}_B(E)$.
Damit:

$$\dim_H(E \cap (F + x)) \leq \max\{0, \dim_H E + \dim_H F - n\} \qquad (2)$$

Bild eines Maßes

Man kann Maße von einem metrischen Raum X auf einen anderen Raum Y abbilden.
Das Bild eines Maßes μ unter einer Abbildung $f : X \to Y$ ist definiert durch:

$$f_\sharp \mu(A) = \mu(f^{-1}A)$$

für $A \subset Y$.
$f_\sharp \mu$ ist ein Maß auf Y.
A ist $f_\sharp \mu$-messbar gdw. $f^{-1}(A)\mu$-messbar ist.
Wenn μ ein Borelmaß und f eine Borel-messbare Funktion sind, ist $f_\sharp \mu$ ein Borelmaß.

Satz (2)

Seien $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *beliebige Borelmengen, sei* $I(n)$ *die Gruppe der Isometrien auf* $\mathbb{R}^n$*, sei* $\dim_H E > (n+1)/2$ *oder* $\dim_H F > (n+1)/2$.
Dann gilt

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n \tag{3}$$

für f *in einer Teilmenge von* $I(n)$ *mit positivem* μ*-Maß.*

Beweisidee

Wie in der Definition der Isometrie sei $f = (\tau_z \circ g)$.
Für den Beweis verwenden wir potentialtheoretische Methoden um die Hausdorff-Dimension abzuschätzen.

Beweisidee (2)

Aus dem Vortrag *Berechnung der Dimension von Fraktalen* wissen wir:

Lemma (1)

Sei M eine Borelmenge aus $\mathbb{R}^n$.
Wenn $\mathcal{H}^s(M) > 0$, dann existiert eine Massenverteilung μ auf M mit $I_t(\mu) < \infty$ für alle $t < s$.

Seien $s < \dim_H E$ und $t < \dim_H F$,
dann gibt es Massenverteilungen μ auf E und ν auf F mit $I_s(\mu) < \infty$ und $I_t(\nu) < \infty$.

Beweisidee (3)

$\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu$ ist ein Schnittmaß auf $E \cap (\tau_z \circ g)F$[1].

$$\int_O \int_{\mathbb{R}^n} I_{s+t-n}(\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu)\, dz\, dg$$

ist das Integral über die Energie dieses Schnittmaßes.
Man kann zeigen[2]:

$$\int_O \int_{\mathbb{R}^n} I_{s+t-n}(\mu \cap (\tau_z \circ g)_\sharp \nu)\, dz\, dg \leq c \cdot I_s(\mu) I_t(\nu)$$

[1] [Mattila] S. 171
[2] [Mattila] Lemma 13.10

Beweisidee (4)

Damit ist die Energie des Schnittmaßes von μ und ν endlich, wenn $I_s(\mu)$ und $I_t(\nu)$ endlich sind.
Dies gilt, wie wir bereits gesehen haben.

Beweisidee (5)

Wir wissen aus dem Vortrag *Berechnung der Dimension von Fraktalen*:

Lemma (2)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Gibt es eine Massenverteilung μ auf M mit $I_s(\mu) < \infty$, so gilt: $\mathcal{H}^s(M) = \infty$ und $\dim_H(M) \geq s$

Mit $M = (E \cap f(F))$ ist:

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq s + t - n$$

und

$$\dim_H(E \cap f(F)) \geq \dim_H E + \dim_H F - n$$

Schnitt zweier Cantormengen

Sei C die bereits bekannte Cantormenge.
Wie im letzten Vortrag gesehen gilt:

$$\dim_H(C \times C) = \dim_H(C) + \dim_H(C) = 2 \cdot \log 2 / \log 3$$

Dann gilt mit Satz 1 für fast alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\dim_H(C \cap (C + x)) \leq \max\{0, \dim_H(C \times C) - 1\}$$
$$= 2 \cdot \log 2 / \log 3 - 1 \approx 0,262$$

Schnitt zweier Cantormengen

mit Satz 2 gilt:

$$\dim_H(C \cap (C + x)) \geq \dim_H C + \dim_H C - 1$$

für eine Anzahl von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Lesbegue-Maß.

$$\Rightarrow \dim_H(C \cap (C + x)) = 2 \cdot \dim_H C - 1 \approx 0,262$$

für eine Anzahl von $x \in \mathbb{R}$ mit positivem Lesbegue-Maß.

Ende

Danke für die Aufmerksamkeit!

Bibliographie:

K. Falconer
Fractal geometry. Mathematical foundations and applications
Wiley, 2003

P. Mattila
Geometry of Sets and Measures in Euclidian space
Cambridge University Press, 1995