Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
18.10.2006

Räumliche Statistik
Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 24.10.2006 vor den Übungen

Aufgabe 1 (5 Punkte) Sei $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Borel-messbare Abbildung, so dass die Urbilder von beschränkten Borelmengen beschränkt sind, d.h.,

$$T^{-1}(B) \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß.

(a) Zeige, dass $\{\tilde{N}_B := N_{T^{-1}(B)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert.

(b) Sei zusätzlich $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ poissonsch mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass dann auch $\{\tilde{N}_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ poissonsch ist und bestimme das Intensitätsmaß.

(c) Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein poissonsches Zählmaß. Ist dann für eine Abbildung $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ auch durch $\{N'_B := N_{T(B)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein poissonsches Zählmaß definiert? Beweise die Aussage bzw. finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$, einer Multinomialverteilung genügen, d.h., es gilt

$$\mathbb{P}(N_{B_1} = k_1, \ldots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1), \ldots, \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, so dass $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ soll mit Hilfe der Akzeptanz- und Verwerfungsmethode auf einer Teilmenge C des $\mathbb{R}^2$ simuliert werden, die wie folgt definiert ist:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0, \pi],\ 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

Dabei werden die Punkte gleichverteilt in der Menge $[0, \pi] \times [0, 1]$ vorgeschlagen. Wie hoch ist die erwartete Anzahl der insgesamt bei der Simulation vorgeschlagenen Punkte?

Aufgabe 4 (6 Punkte) Sei N ein zufälliges Zählmaß im $\mathbb{R}^d$. Der Operator

$$L_N(f) = \mathbb{E} \exp[- \int_{\mathbb{R}^d} f(x) N(dx)]$$

auf der Menge der Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heisst das Laplace-Funktional von N. Dabei benutzen wir die Schreibweise $N(dx) = N_{dx}$. Man kann zeigen, dass zwei zufällige Zählmaße N und N' genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn $L_N(f) = L_{N'}(f)$ für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$, die einen kompakten Träger haben. Eine Funktion f hat einen kompakten Träger, wenn die Menge $\{x : f(x) > 0\}$ in einem Kompaktum enthalten ist.
Zeige, dass ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ das Laplace-Funktional

$$L_N(f) = \exp[-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)]$$

hat.

Hilfsmittel

Wald's Identity
Sei N eine Zufallsvariable, so dass $\mathbb{P}(N \in \mathbb{N}) = 1$, und $\{X_n\}_{n \in N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, die unabhängig ist von N. Es gelte ferner, dass $\mathbb{E}|N|$ und $\mathbb{E}|X_1|$ endlich sind. Dann ist auch $\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{N} X_i\right|$ endlich und es gilt

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} X_i = \mathbb{E}N\mathbb{E}X_1.$$