Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
31.10.2006

# Räumliche Statistik
## Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 15.11.2006 vor den Übungen

**Aufgabe 1** Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$.

(a) (3 Punkte) Sei $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für $\lambda$ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(b) (5 Punkte) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{|W_n|}{\lambda}}(\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist.

(c) (4 Punkte) Für jedes $n \geq 1$ seien die Mengen $L_n$, $U_n \subset \mathbb{R}^d$ jeweils die Vereinigung von endlich vielen $d-$dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\delta > 0$, die sich nicht überlappen. Ferner erhalte man für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $L_{n+1}$ und $U_{n+1}$, indem zu $L_n$ bzw. $U_n$ endlich viele dieser Würfel hinzugefügt werden. Es sei nun $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ und zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$L_n \subset W_n \subset U_n \text{ sowie } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(L_n)}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(U_n)}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Zeige, dass dann $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent ist, d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte) Sei $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \leq r\}$ die $d$-dimensionale Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \geq 0$. Außerdem sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$. Dann heißt die Funktion $H_S : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$H_S(r) = P(N_{B(o,r)} > 0)$$

die sphärische Kontaktverteilungsfunktion des Poisson-Prozesses, wogegen die Funktion $D : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ mit

$$D(r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(N_{B(o,r)} > 1 \mid N_{B(o,\varepsilon)} > 0)$$

Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion genannt wird.
Zeige, dass für jedes $r > 0$

$$H_S(r) = D(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d),$$

wobei $\kappa_d$ das Volumen der $d$-dimensionalen Einheitskugel ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$ und sei $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$. Außerdem sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvektoren $Z_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, wobei die Folgen $\{S_n\}$ und $\{Z_n\}$ unabhängig seien.

(a) Zeige, dass dann $\{S_n + Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine messbare Indizierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda$ ist.

(b) Wie ändert sich das Intensitätsmaß, wenn $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein beliebiger, nicht notwendig homogener Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ ist?

**Aufgabe 4** (4 Punkte) **Campbellsches Theorem**
Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein einfaches zufälliges Zählmaß mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, d.h. es gelte $\mu(B) = \mathbb{E} N_B$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem sei $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n$ ein Zufallsvektor $S_n : \Omega \to \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$, so dass $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Zeige, dass dann für jede nichtnegative Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ mit $f(\infty) = 0$ gilt

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx),$$

d.h., $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für das Integral $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx)$.