Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
15.11.2006

Räumliche Statistik
Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 29.11.2006 vor den Übungen

Bemerkungen zu den Programmieraufgaben
Bitte gebt zu den Aufgaben 1 und 2 neben einer Dokumentation Eurer Ergebnisse einen Ausdruck Eures Programmcodes ab. Wenn Ihr eine andere Programmiersprache als C, C++ oder Java benutzen möchtet, haltet vorher Rücksprache. In Aufgabe 1(a) empfiehlt es sich, für den Shapiro-Wilk Test R oder S+ zu benutzen.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein homogener Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^2$ mit der Intensität $\lambda_0 = 0.001$.

(a) Generiere für die Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$, wobei $m = 100$, $m = 300$ und $m = 500$, jeweils 100 Realisierungen $t_1, \ldots, t_{100}$ der Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\hat{\lambda}_W}}(\hat{\lambda}_W - \lambda_0),$$

wobei $\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_2(W)}$. Prüfe für alle drei Werte von m mit Hilfe eines Shapiro-Wilk Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Hypothese abzulehnen ist, dass $t_1, \ldots, t_{100}$ Realisierungen von $N(0,1)$-verteilten Stichprobenvariablen sind.

(b) Wir betrachten einen MC-Rangtest zur Verifizierung des Hypothesenpaars

$$H_0: \ \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1: \ \lambda \neq \lambda_0$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$. Der Test möge auf 100 Realisierungen $t_0, t_1, \ldots, t_{99}$ der Testgröße T beruhen. Dabei ergeben sich $t_1, \ldots, t_{99}$ aus Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ_0, während sich t_0 aus einer Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ errechnet. Die empirische Gütefunktion $\alpha(\lambda)$ des Tests ist definiert als

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sharp\{k : \rho_0^{(k)} > 95\}}{n},$$

wobei n die Anzahl der Testläufe und $\rho_0^{(k)}$ den Rang von t_0 im k-ten Testlauf bezeichnet.
Simuliere die Werte der empirischen Gütefunktion für $\lambda \in \{0.001, 0.002, \ldots, 0.009, 0.01\}$. Führe dabei für jeden Wert λ jeweils 100 Testläufe auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ durch.

(c) Wie ändern sich die Werte der empirischen Gütefunktion, wenn das Fenster $W = [0, 1000]^2$ betrachtet wird?

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein inhomogener Poisson-Prozess in $W = [0,100]^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit der Intensitätsfunktion

$$\lambda(x_1, x_2) = 10^{-5} x_1 x_2 \text{ für } x_1, x_2 \in [0,100].$$

Generiere 10 Realisierungen dieses Poisson-Prozesses. Aus Vereinfachungsgründen betrachten wir den Schätzer

$$\hat{\lambda}_h(x) = \frac{N_{[x_1 - \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2}] \times [x_2 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h}{2}] \cap W}}{\nu_2([x_1 - \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2}] \times [x_2 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h}{2}] \cap W)}, \qquad x = (x_1, x_2).$$

(a) Bestimme für jede der 10 Realisierungen eine optimale Bandbreite $\hat{h}$ in der Menge $\{11, 12, \ldots, 30\}$ mittels Likelihood-Cross-Validation.

(b) Berechne für jede der 10 Realisierungen die Approximationen

$$\tilde{e}_h = \frac{1}{100^2} \sum_{i,j=0}^{99} [\hat{\lambda}_h((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})) - \lambda((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}))]^2, \; h = 11, \ldots, 30$$

des mittleren quadratischen Fehlers

$$\hat{e}_h = \frac{1}{\nu_2([0,100]^2)} \int_{[0,100]^2} (\hat{\lambda}_h(x) - \lambda(x))^2 dx.$$

Minimiert das in (a) ermittelte optimale $\hat{h}$ auch den mittleren quadratischen Fehler in der Menge $\{11, \ldots, 30\}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass

$$\mathbb{E}(N_B \mid N_{B'} = n) = n \frac{\mu(B)}{\mu(B')}$$

für beliebige $B, B' \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $B \subset B'$ und $0 < \mu(B') < \infty$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Seien $\{N_B^{(1)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ und $\{N_B^{(2)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ unabhängige homogene Poisson-Prozesse mit Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Sei $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine beliebige Familie von Zufallsvektoren, die von $\{N_B^{(1)}\}$ und $\{N_B^{(2)}\}$ unabhängig ist. Sei ferner $A(X_1, \ldots, X_n) = conv\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zufällige konvexe Hülle von $X_1, \ldots, X_n$. Zeige, dass der Prozess

$$N_B = N^{(1)}_{B \cap A(X_1, \ldots, X_n)} + N^{(2)}_{B \cap A^c(X_1, \ldots, X_n)}$$

ein Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist, wobei

$$\Lambda_B = \lambda_1 \nu_d(B \cap A(X_1, \ldots, X_n)) + \lambda_2 \nu_d(B \cap A^c(X_1, \ldots, X^n)).$$