Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
29.11.2006

Räumliche Statistik
Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 13.12.2006 vor den Übungen

Aufgabe 1 (5 Punkte) Ein Punktprozess kann als eine messbare Abbildung $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ von einem abstrakten Wahrscheinlicheitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ in den Raum $\mathbb{N}$ der lokal endlichen Zählmaße mit der σ-Algebra

$$\mathcal{N} = \sigma\{\{N \in \mathbb{N} : N(B) = k\}, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), k \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$$

aufgefasst werden. Zeige, das zwei Punktprozesse $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$ genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn

$$(N^{(1)}(B_1), \ldots, N^{(1)}(B_k)) \stackrel{d}{=} (N^{(2)}(B_1), \ldots, N^{(2)}(B_k))$$

für alle $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

Hinweise: 1. Zeige zunächst, dass $\mathcal{N}$ so definiert ist, dass für alle $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ die Projektionsabbildungen

$$\pi_B : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{N},\ N \mapsto N_B$$

messbar ist.

2. Benutze einen Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie wie das folgende Resultat:
Sei $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf einem Raum Ω, d.h. $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$ und aus $A, B \in \mathcal{G}$ folge $A \cap B \in \mathcal{G}$. Ferner existiere eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Mengen aus $\mathcal{G}$, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Dann sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gleich, wenn

$$P_1(A) = P_2(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{G}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein stationärer Matern-Cluster-Prozess mit den Parametern $\lambda_0, \lambda^{(1)}, R > 0$ und sei $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \nu_2(W_n) = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_2(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_2(W_n)} = 1$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimme die asymptotische Varianz $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \nu_2(W_n) Var\widehat{\lambda}_{W_n}$ des Schätzers

$$\widehat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_2(W_n)}$$

für die Intensität λ von $\{N_B\}$ als Funktion von $\lambda_0, \lambda^{(1)}$ und R.

(b) Zeige die asymptotische Normalverteiltheit von $\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}}(\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda')$ durch Vervollständigung des letzten Schrittes im Beweis von Theorem 3.12, d.h., führe die notwendigen Umformungen der dort gegebenen charakteristischen Funktion mittels Potenzreihenentwicklung durch.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein stationärer Matern-Cluster-Prozess mit den Parametern $\lambda_0, \lambda^{(1)}, R > 0$.

(a) Zeige, dass der Grenzwert

$$D(r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(N_{B(0,r)} > 1 \mid N_{B(0,\varepsilon)} > 0)$$

in der Definition der Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion $D : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ für jedes $r \geq 0$ existiert.

(b) Zeige, dass $D(r) \geq H_S(r)$ für alle $r \geq 0$, wobei $H_S(r) = P(N_{B(0,r)} > 0)$, $r \geq 0$, die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von $\{N_B\}$ ist.

Hinweis: Betrachte $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P(N_{B(0,\varepsilon)} > 0)}{\nu_d(B(0,\varepsilon))}$ und nutze die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, wobei unter einer Realisierung des Elternprozesses bedingt wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein stationärer Matern-Cluster-Prozess mit den Parametern $\lambda_0, \lambda^{(1)}, R > 0$.

(a) Zeige, dass die endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten von $\{N_B\}$ gegen die entsprechenden endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität λ konvergieren, wenn $\lambda_0 \to \infty$, $\lambda^{(1)} \to 0$ und $R \to 0$, so dass $\lambda_0 \lambda^{(1)} \to \lambda \in (0, \infty)$. Zeige also, dass für $n \in \mathbb{N}$ und alle halboffenen beschränkten Quader $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{Q}^d$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ unter diesen Voraussetzungen

$$P(N_{Q_1} = k_1, \ldots, N_{Q_n} = k_n) \to P(N'_{Q_1} = k_1, \ldots, N'_{Q_n} = k_n),$$

wobei N' ein homogener Poisson Prozess mit Intensität λ ist.

Hinweis: Zeige zunächst die punktweise Konvergenz des erzeugenden Funktionals von $\{N_B\}$ gegen das erzeugende Funktional des entsprechenden Poisson-Prozesses $\{N'_B\}$ für alle ν_2-f.ü. stetigen Funktionen $f \in \mathcal{H}$. Schließe dann durch spezielle Wahl von f auf die Konvergenz der gemeinsamen Verteilung von $(N_{Q_1}, \ldots, N_{Q_n})$.

(b) Gilt die gleiche Art von Konvergenz auch für die Kontaktverteilungsfunktion von $\{N_B\}$?

(c) Zeige, dass eine entsprechende Konvergenzaussage für die asymptotische Varianz $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \nu_2(W_n) \mathrm{Var} \widehat{\lambda}_{W_n}$ nicht richtig ist.