Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
13.12.2006

Räumliche Statistik
Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 10.01.2007 vor den Übungen

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Bitte gebt einen Ausdruck Eures Quellcodes und der Visualisierungen, sowie eine Dokumentation Eurer Ergebnisse ab. Für die Visualisierungen ist es zweckmäßig, S+ oder R zu verwenden.

(a) Implementiere einen Algorithmus zur randeffektfreien Simulation eines Matern-Cluster Prozesses auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$. Visualisiere jeweils eine Realisierung des Matern-Cluster-Prozesses auf dem Fenster $W = [0, 1000]^2$ für die Parametervektoren $(\lambda_0, \lambda^{(1)}, R)$, wobei λ_0 die Werte $10^{-5}, 10^{-4}$ und 10^{-3} durchläuft, der Clusterradius $R = 50$ konstant bleibt und $\lambda^{(1)}$ so gewählt wird, dass die Gesamtintensität λ stets 0.001 ist, d.h. $\lambda^{(1)} = \frac{0.001}{50^2 \pi \lambda_0}$.

(b) Implementiere eine Prozedur, die den randkorrigierten Schätzer $\hat{D}(r)$ für die Nächste-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion (NNAVF) eines Punktprozesses mit messbarer Indizierung $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf W berechnet, der wie folgt gegeben ist:

$$\hat{D}(r) = \frac{1}{\hat{\lambda}_H} \sum_{S_n \in W} \frac{\mathbb{1}_{\{\delta(S_n) < d_{\partial W}(S_n)\}} \mathbb{1}_{(0,r]}(\delta(S_n))}{\nu_2(W \setminus \{x \in W : d_{\partial W}(x) < \delta(S_n)\})}.$$

Dabei bezeichnet $\delta(X_n)$ den Abstand des Punktes S_n zu seinem nächsten Nachbarn und $d_{\partial W}(x)$ den Abstand des Punktes x zum Rand des Fensters W. Ferner ist $\hat{\lambda}_H$ definiert als

$$\hat{\lambda}_H = \sum_{S_n \in W} \frac{\mathbb{1}_{\{\delta(S_n) < d_{\partial W}(S_n)\}}}{\nu_2(W \setminus \{x \in W : d_{\partial W}(x) < \delta(S_n)\})}.$$

(c) Visualisiere für die in (a) gegebenen Parameterkonstellationen den Schätzer der NNAVF für jeweils eine Realisierung eines Matern-Cluster-Prozesses im Vergleich zur theoretischen NNAVF eines homogenen Poisson-Prozesses mit gleicher Intensität $\lambda = 0.001$. Betrachte dabei die Werte $r = 1, 2, \ldots, 50$.

(d) Bestimme empirisch eine punktweise 94%-Umgebung der NNAVF eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda = 0.001$ an den Stellen $r = 5i$, $i = 1, \ldots, 10$. Simuliere zu diesem Zweck 200 Realisierungen des Poisson-Prozesses, schätze die NNAVF an den genannten Stellen und wähle die Grenzen der Umgebung durch Streichen der 6 kleinsten und der 6 größten Realisierungen des Schätzers.

(e) Bestimme für die in (a) gegebenen Parameterkonstellationen jeweils durch 100 Simulationen die empirische Wahrscheinlichkeit, dass die NNAVF des Matern-Cluster-Prozesses vollständig in dem in (d) bestimmten 94%-Schlauch des homogenen Poisson-Prozesses mit der gleichen Intensität enthalten ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Betrachte die zufällige abgeschlossene Menge Ξ aus der Definition des modulierten Poisson-Prozesses, d.h. $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$, wobei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine messbare Indizierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ_0 bezeichne und $r > 0$ ein konstanter Radius ist. Zeige, dass die Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeit $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$ für alle beliebigen aber festen $x \in \mathbb{R}^d$ gegeben ist als

$$p_{o,x} = \begin{cases} 2p_o - 1 + (1-p_o)^2 \exp[\lambda_0 \nu_d(B(o,r) \cap B(x,r))], & \text{falls } |x| < 2r, \\ p_o^2, & \text{falls } |x| \geq 2r. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Zeige mit Hilfe von Korollar 3.3, dass das erzeugende Funktional $G : \mathcal{H} \to [0,1]$ eines Neyman-Scott-Prozesses gegeben ist durch

$$G(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} g\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy)\right] - 1\, dx\right),$$

wobei $P_S : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ die Verteilung von $S_i^{(n)}$ ist und $g : [-1,1] \to [0,1]$ die erzeugende Funktion der Gesamtzahl von Sekundärpunkten ist, die von einem Primärpunkt generiert werden, d.h.,

$$g(z) = \mathbb{E} z^{T^{(1)}}, \text{ für alle } z \in [-1,1].$$

(b) Sei $T^{(1)} \sim Poi(\lambda_1)$ und P_S absolutstetig bezüglich ν_d mit Dichte $p_S : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$. Folgere aus der sich unter diesen Voraussetzungen ergebenden speziellen Form von $G(f)$ und aus der Formel für das erzeugende Funktional eines Poisson-Prozesses mit Parameter λ_0, dass dann

$$G(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_n)\, dx\right),$$

wobei $\lambda^{(1)}(x) = \lambda_1 p_S(x)$. Beachte, dass damit gezeigt ist, dass der Neyman-Scott-Prozess in diesem Fall nicht nur als Poissonscher Cluster-Prozess, sondern auch als Cox-Prozess betrachtet werden kann.