

Räumliche Statistik

Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 31.01.2007 vor den Übungen

Zur Lösung der Aufgaben steht auf der Homepage der Vorlesung eine Java-Klasse zur Verfügung, die für den Umgang mit geometrischen Objekten wie Punkten, Linien und Polygonen konzipiert worden ist. Von besonderem Interesse sind die Objekte `Point`, `LineSegment` und `ConvexPolygon` mit ihren zugehörigen Methoden. Die Datei ist nur von Rechnern der Uni Ulm aus zugänglich.

Aufgabe 1 (5+3+4+3 Punkte)

- (a) Implementiere eine Klasse, die eine Realisierung eines Poisson-Voronoi-Mosaiks (PVM) auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Die Zellen sollen dabei Objekte der Klasse `ConvexPolygon` sein. Zur Berechnung der Voronoi-Zellen können die Methoden `intersectWithHalfplane(ConvexPolygon, LineSegment)` und `bisector(Point, Point)` verwendet werden.
- (b) Die Klasse soll nun so erweitert werden, dass die Zelle um den Ursprung, sowie deren Anzahl von Eckpunkten, ihre Randlänge und ihr Flächeninhalt betrachtet werden können. Nützliche Methoden für die Implementierung sind dabei `side(Line, Point)` und `ConvexPolytope.getArea()`.
- (c) Berechne nun basierend auf 10000 Realisierungen eines PVM mit Intensität $\lambda = 5 * 10^{-4}$ die mittlere Eckenanzahl, den mittleren Flächeninhalt und die mittlere Randlänge der den Ursprung enthaltenden Zelle. Wähle dabei das Beobachtungsfenster so groß, dass praktisch keine Randeffekte auftreten (Vorschlag $W = [-250, 250]^2$) und überprüfe dies im Programm.
- (d) Teste mittels eines asymptotischen Tests die Hypothese, dass die Erwartungswerte der Stichprobenvariablen aus Teil(c) (Eckenanzahl, Flächeninhalt und Randlänge) den theoretischen Erwartungswerten 6 , $\frac{1}{\lambda}$ bzw. $\frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ der *typischen* Zelle entsprechen.

Aufgabe 2 (6+3+3+3 Punkte)

- (a) Implementiere den im Skript vorgestellten Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks in $\mathbb{R}^2$. Die Zelle soll vom Typ `ConvexPolygon` sein. Ferner sollen der Flächeninhalt, die Randlänge und die Eckenanzahl berechnet werden.
- (b) Was ist für das Verhalten der mittleren Randlänge, der mittleren Eckenanzahl bzw. des mittleren Flächeninhalts der typischen Zelle im Vergleich zu der den Ursprung enthaltenden Zelle zu erwarten? Begründe Deine Aussage.

- (c) Überprüfe die in (b) gemachte Aussage anhand von 10000 Realisierungen der typischen Zelle für $\lambda = 5 * 10^{-4}$.
- (d) Teste mittels eines asymptotischen Tests die Hypothese, dass die Erwartungswerte der Stichprobenvariablen aus Teil(c) (Eckenanzahl, Flächeninhalt und Randlänge) den theoretischen Erwartungswerten $6, \frac{1}{\lambda}$ bzw. $\frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ der typischen Zelle entsprechen.