Prof. Dr. V. Schmidt
Dipl.-Math. oec. S. Lück

WS 2006/2007
31.01.2007

# Räumliche Statistik
## Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 14.02.2007 vor den Übungen

**Aufgabe 1** (3+4+4 Punkte) Sei $X_\ell$ ein Poissonscher Geradenprozess in $\mathbb{R}^2$, der durch einen unabhängig markierten Poisson Prozess $\{(R_n, V_n)\}$ mit Intensität $\lambda_\ell$ und $V_n \sim U([0,\pi))$ induziert wird.

(a) Zeige, dass $\mathbb{E}\nu_1(X_\ell \cap B)$ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{E}\nu_1(X_\ell \cap B) = \lambda_\ell$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $\nu_2(B) = 1$.

(c) Zeige, dass die durch $X_\ell$ induzierten Polygone $\{\Xi_n, n \geq 1\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 beschränkt sind.

**Aufgabe 2** (5 Punkte) Sei $X_\ell$ ein Poissonscher Geradenprozess im $\mathbb{R}^2$ mit Intensität $\lambda_\ell$, und das stationäre zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ sei gegeben durch

$$\Lambda_B = \lambda^{(1)} \nu_1(X_\ell \cap B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

wobei $\lambda^{(1)} > 0$. Zeige, dass die Palmsche Verteilung $P_\Lambda^0$ von $\{\Lambda_B\}$ gegeben ist durch

$$P_\Lambda^0(A) = P(\{\Lambda_B^0\} \in A) \qquad \forall A \in \mathcal{M},$$

wobei $\Lambda_B^0 = \lambda^{(1)} \nu_1((\ell_{o,V_0} \cup X_\ell) \cap B)$ und $V_0 \sim U([0,\pi))$ eine von $\{(R_n, V_n)\}$ unabhängige Zufallsvariable ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte) Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ in $\mathbb{R}^2$ und sei $\{\Xi_n\}$ das zugehörige Cox-Voronoi-Mosaik, d.h.,

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x - S_n| \leq |x - S_m| \ \forall m \neq n\}.$$

Zeige, dass die Zellen $\Xi_n$ mit Wahrscheinlichkeit 1 beschränkte Mengen sind.

**Aufgabe 4** (3+3 Punkte)

(a) Bestimme die Palmsche Verteilung eines Gauss-Poisson Prozesses (vgl. Kapitel 3.3.3), d.h. bestimme die spezielle Form des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\tilde{P}(A)$ aus Kapitel 4.2.5.

(b) Beschreibe einen Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle eines Voronoi-Mosaiks, das durch einen Gauß-Poisson Prozess generiert wird, wobei $S^{(1)} \sim U(b(o,r))$ für ein $r > 0$.

**Aufgabe 5** (3 Punkte) **Verallgemeinerter Satz von Campbell**

Sei $f : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty)$ messbar. Zeige, dass dann für jeden Punktprozess $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x)\varphi(dx) P_N(d\varphi) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x)\gamma(d(\varphi, x)).$$