



Räumliche Statistik

für Punktprozesse und weitere Modelle der stochastischen Geometrie

Universität Ulm
Institut für Stochastik

Vorlesungsskript
Prof. Dr. Volker Schmidt
Stand: Wintersemester 2006/07

ULM, IM FEBRUAR 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Poissonsche Zählmaße	7
2.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	7
2.1.1	Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen	7
2.1.2	Poisson-Prozesse als zufällige Zählmaße	8
2.1.3	Messbare Indizierung der Atome	11
2.1.4	Simulationsalgorithmus; Akzeptanz- und Verwerfungsmethode	13
2.1.5	Transformationssätze	15
2.2	Homogene Poisson-Prozesse	17
2.2.1	Radiale Simulation	17
2.2.2	Schätzung der Intensität; Signifikanztests	19
2.3	Poisson-Prozesse mit absolutstetigem Intensitätsmaß	21
2.3.1	Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus	21
2.3.2	Nichtparametrische Schätzung der Intensitätsfunktion; Randkorrektur	23
3	Zufällige Punktprozesse	26
3.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	26
3.1.1	Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem	26
3.1.2	Erzeugendes Funktional	27
3.1.3	Laplace-Funktional	30
3.1.4	Stationarität	31
3.2	Cox-Prozesse	33
3.2.1	Simulationsalgorithmus und grundlegende Eigenschaften	33
3.2.2	Absolutstetiges zufälliges Intensitätsmaß; Schätzung der Intensität	36
3.2.3	Gemischte Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse, modulierte Poisson-Prozesse	37
3.2.4	Varianz und asymptotische Normalverteiltheit des Intensitätsschätzers	41
3.3	Cluster-Prozesse	49
3.3.1	Definition und erzeugendes Funktional	49
3.3.2	Poissonsche Cluster-Prozesse; Eigenschaften des Intensitätsschätzers	53
3.3.3	Beispiele: Gauß-Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse	56
3.4	Ergodizität; starke Konsistenz des Intensitätsschätzers	58
3.4.1	Dynamische Systeme; individueller Ergodensatz	58
3.4.2	Ergodizitätskriterien	62
3.4.3	Ergodizität von Cox-Prozessen; Beispiele	65
3.4.4	Ergodische Cluster-Prozesse	68

4	Palmsche Verteilung und weitere Kenngrößen von Punktprozessen	70
4.1	Palmsche Verteilung	70
4.1.1	Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt	70
4.1.2	Lokale Charakterisierung	73
4.1.3	Reduzierte Palmsche Verteilung; Satz von Slivnyak	77
4.1.4	Typische Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken; Simulationsalgorithmus	79
4.2	Campbellsche Maße; Beispiele von Palmschen Verteilungen	80
4.2.1	Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes von Poisson–Prozessen	80
4.2.2	Palmsche Verteilung von zufälligen Maßen; Cox–Prozesse	83
4.2.3	Beispiele: modulierte Poisson–Prozesse, Cox–Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen	86
4.2.4	Typische Zelle von Cox–Voronoi–Mosaiken; Simulationsalgorithmen	89
4.2.5	Poissonsche Cluster–Prozesse	91
4.3	Weitere Kenngrößen von Punktprozessen und ihre Schätzer	94
4.3.1	Kontaktverteilungsfunktion; Minus–Sampling	95
4.3.2	Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion; randkorrigiertes Minus–Sampling	97
4.3.3	Höhere Momentenmaße	101
4.3.4	Zweites reduziertes Momentenmaß; Ripleysche K–Funktion	103
4.3.5	Produktdichte und Paarkorrelationsfunktion; randkorrigierte Kernschätzer	106
4.3.6	Beispiele: Poisson–, Cox– und Cluster–Prozesse; Matérn–Hardcore–Prozesse	107

Literatur

- [1] Baddeley, A., Bárány, I., Schneider, R., Weil, W.
Stochastic Geometry. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1892, Springer, Berlin 2007
- [2] Baddeley, A., Gregori, P., Mateu, J., Stoica, R., Stoyan, D. (Hrsg.)
Case Studies in Spatial Point Process Modeling. Lecture Notes in Statistics, Vol. 185,
Springer, New York 2006
- [3] Baddeley, A., Vedel-Jensen, E.B.
Stereology for Statisticians. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton 2005
- [4] Benes, J., Rataj, J.
Stochastic Geometry. Kluwer, Boston 2004
- [5] Daley, D.J., Vere-Jones, D.
An Introduction to the Theory of Point Processes. Springer, New York 2005
- [6] Diggle, P.J.
Statistical Analysis of Spatial Point Patterns. Arnold, London 2003
- [7] Kallenberg, O.
Foundations of Modern Probability. Springer, New York 2001
- [8] Kingman, J.F.C.
Poisson Processes. Oxford University Press, Oxford 1993
- [9] König, D., Schmidt, V.
Zufällige Punktprozesse. Teubner, Stuttgart 1992
- [10] Lawson, A.B.
Statistical Methods in Spatial Epidemiology. J. Wiley & Sons, Chichester 2006
- [11] Molchanov, I.
Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians. J. Wiley & Sons,
Chichester 1997
- [12] Molchanov, I.
Theory of Random Sets. Springer, London 2005
- [13] Møller, J., Waagepetersen, R.P.
Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes. Chapman & Hall / CRC,
Boca Raton 2004
- [14] Ohser, J., Mücklich, F.
Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science. J. Wiley & Sons, Chichester 2000
- [15] Schneider, R., Weil, W.
Stochastische Geometrie. Teubner, Stuttgart 2000
- [16] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J.
Stochastic Geometry and its Applications. J. Wiley & Sons, Chichester 1995
- [17] Stoyan, D., Stoyan, H.
Fractals, Random Shapes and Point Fields. J. Wiley & Sons, Chichester 1994

1 Einleitung

Die Vorlesung gibt eine Einführung in einige grundlegende Ansätze der räumlichen Statistik, die auf Modellen der stochastischen Geometrie beruhen. Dabei werden Eigenschaften dieser Modelle, Algorithmen zu ihrer Simulation sowie hierauf aufbauende statistische Methoden diskutiert.

Schwerpunkte der Vorlesung sind die folgenden Modelle:

- Poissonsche Punktprozesse
- Stationäre zufällige Mengen, insbesondere
- Stationäre Punktprozesse und deren Palmische Verteilung
- Zufällige Mosaik
- Keim–Korn–Modelle

Typische Realisierungen dieser Modelle sind in den Abbildungen 1 – 3 dargestellt.

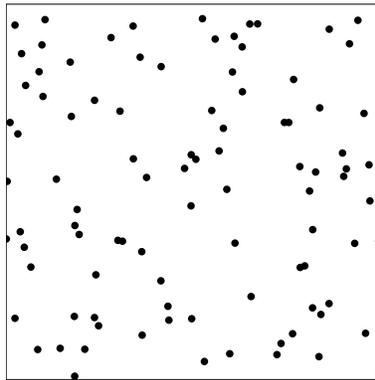


Abbildung 1: Poissonscher Punktprozess

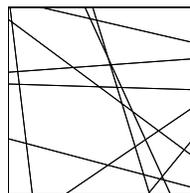


Abbildung 2: Poissonsches Geraden-Mosaik

Die bisher vorliegenden Kapitel 1 – 4 des Skriptes betreffen denjenigen Teil der Vorlesung, der im Wintersemester 2006/07 für Studenten und Doktoranden der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm gehalten wurde.

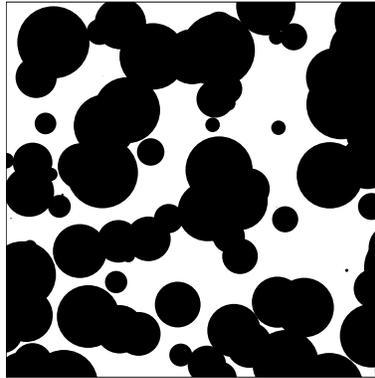


Abbildung 3: Boolesches (Keim-Korn-) Modell

Das Hauptanliegen dieser ersten 4 Kapitel ist es, eine Einführung in die Modellierung, Simulation und Statistik von unregelmäßigen Punktmustern zu geben. Dabei werden verschiedene grundlegende Klassen von zufälligen Punktprozessen zur Illustration der Ergebnisse diskutiert. Insbesondere wird dies für homogene und inhomogene Poissonsche Punktprozesse getan. Darüber hinaus werden weitergehende Ergebnisse für einige ausgewählte Beispiele von Cox-Prozessen und von Poissonschen Cluster- bzw. Hardcore-Prozessen vorgestellt.

Es ist geplant, die Vorlesungen zur räumlichen Statistik im Sommersemester 2007 fortzusetzen und dabei weitere Kapitel des Skriptes zu erarbeiten. Sie werden dann vor allem Fragestellungen zur Modellierung, Simulation und Statistik für markierte Punktprozesse, Keim-Korn-Modelle bzw. zufällige Mosaikere betreffen.

Verweise auf die Vorlesungsmanuskripte „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ bzw. „Wahrscheinlichkeitstheorie“ werden wir mit dem Zusatz „WR“ bzw. „WT“ vor der Nummer der zitierten Abschnitte, Lemmata, Theoreme, Korollare bzw. Formeln kennzeichnen.

Gelegentlich werden wir auch auf Abschnitte, Lemmata, Theoreme, Korollare bzw. Formeln aus dem Skript zur Vorlesung „Markov Chains and Monte-Carlo Simulation“ im SS 2006 verweisen, wobei diese Verweise dann mit dem Zusatz „MC“ gekennzeichnet werden.

2 Poissonsche Zählmaße

2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit von zufälligen Zählmaßen

- Zur Erinnerung: Sei $d \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ der Borel-Mengen im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d ist die kleinste Familie \mathcal{G} von Teilmengen des \mathbb{R}^d , die
 - alle Quader der Form $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$ für beliebige $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, d$ enthält und
 - abgeschlossen ist bezüglich der Bildung des Komplementes sowie der Vereinigung von abzählbar vielen Mengen aus \mathcal{G} , d.h., für beliebige $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$ gilt $\mathbb{R}^d \setminus A \in \mathcal{G}$ und $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{G}$.
- Das d -dimensionale Lebesgue-Maß $\nu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ wird eindeutig bestimmt durch seine Werte $\nu_d(B) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ für alle Borel-Mengen der Form $B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \in \mathcal{Q}^d$, wobei \mathcal{Q}^d die Familie der (beschränkten) halboffenen d -dimensionalen Quader in \mathbb{R}^d ist, d.h.,

$$\mathcal{Q}^d = \{B \subset \mathbb{R}^d : B = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d], a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \forall i = 1, \dots, d\}. \quad (1)$$

Definition

- Sei \mathbb{N} die Familie aller lokal endlichen Zählmaße $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, d.h., es gilt $\varphi(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{Q}^d$ und $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$ für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Außerdem sei \mathcal{N} die kleinste σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{N} , so dass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes beschränkte $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -messbare Abbildung ist.
- Ein *zufälliges Zählmaß* $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$, d.h., N ist ein (mengen-indizierter) stochastischer Prozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ über (Ω, \mathcal{F}, P) , so dass $\{N_B(\omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ für jedes $\omega \in \Omega$ ein lokal endliches Zählmaß aus \mathbb{N} ist.

Theorem 2.1 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß. Dann ist die Verteilung von $\{N_B\}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$, das eindeutig bestimmt ist durch die Familie der „endlich-dimensionalen“ Wahrscheinlichkeiten $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$, wobei

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n).$$

Der *Beweis* von Theorem 2.1 kann mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen (vgl. Lemma 3.5) geführt werden. Außerdem gilt der folgende (Existenz-) Satz von Kolmogorov für zufällige Maße.

Theorem 2.2

- Sei $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeiten, so dass für jedes $n \geq 1$

$$P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) = P_{B_{\pi(1)}, \dots, B_{\pi(n)}}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}) \quad (2)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{B_1, \dots, B_n, B_{n+1}}(k_1, \dots, k_n, k) = P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) \quad (3)$$

für jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$, für jedes n -Tupel $k_1, \dots, k_n \geq 0$ von nichtnegativen ganzen Zahlen und für beliebige halboffene d -dimensionale Quader $B_1, \dots, B_n, B_{n+1} \in \mathcal{Q}^d$.

- Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und ein zufälliges Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ über diesem Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\{P_{B_1, \dots, B_n}(k_1, \dots, k_n) : n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d\}$ die endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten von $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ sind.

Der *Beweis* von Theorem 2.2 beruht ebenfalls auf Standardtechniken der Maßtheorie, vgl. z.B. Kallenberg (2001), S. 115–116.

2.1.2 Poisson-Prozesse als zufällige Zählmaße

Wir führen nun den Begriff des Poissonschen Zählmaßes im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d ein.

Definition Sei $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ die Familie aller beschränkten Borel-Mengen in \mathbb{R}^d und sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h., $\mu(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

- Man sagt, dass $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein *Poissonsches Zählmaß* mit dem *Intensitätsmaß* μ ist, wenn
 1. N_{B_1}, N_{B_2}, \dots unabhängige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und
 2. $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass das Intensitätsmaß μ proportional zum d -dimensionalen Lebesgue-Maß ν_d ist, d.h., für eine Konstante $\lambda \in (0, \infty)$ gilt

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (4)$$

dann sagt man, dass $\{N_B\}$ ein *homogenes Poissonsches Zählmaß* mit der *Intensität* λ (bzw. kurz ein *homogener Poisson-Prozess*) im \mathbb{R}^d ist.

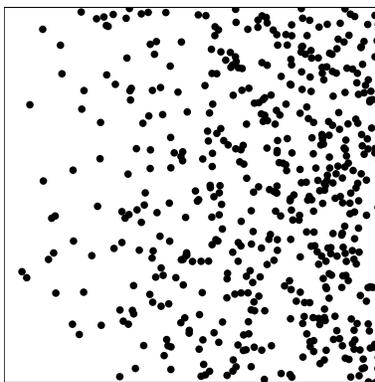


Abbildung 4: Inhomogener Poisson-Prozess

Beachte

- Aus Theorem 2.1 ergibt sich, dass die Bedingungen 1 und 2 in der Definition des Poisson-Prozesses durch die folgenden (scheinbar schwächeren) Bedingungen ersetzt werden können:
 - 1*. Die Zufallsvariablen N_{B_1}, N_{B_2}, \dots sind unabhängig für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{Q}^d$ und
 - 2*. $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$ gilt für jedes $B \in \mathcal{Q}^d$.
- Wenn das Intensitätsmaß μ absolutstetig bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., wenn es eine Borel-messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gibt, so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5)$$

dann wird $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die *Intensitätsfunktion* des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ genannt. Die Intensitätsfunktion des Poisson-Prozesses in Abbildung 4 ist gegeben durch

$$\lambda(x_1, x_2) = 0.001 \cdot x_1 \quad \forall x_1 > 0.$$

Wir diskutieren zunächst einige elementare Eigenschaften von Poisson-Prozessen im \mathbb{R}^d .

Theorem 2.3 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ .

- Dann gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) = \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{k_1! \dots k_n!} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right) \quad (6)$$

für beliebige $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$ und paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

- Außerdem genügen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ und für paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$ einer Multinomialverteilung, d.h., es gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)} \quad (7)$$

für beliebige $k, k_1, \dots, k_n \geq 0$ mit $k = k_1 + \dots + k_n$.

Der Beweis von Theorem 2.3 ergibt sich unmittelbar aus den Bedingungen 1 und 2 in der Definition des homogenen Poisson-Prozesses.

Mit Hilfe der Theoreme 2.1 und 2.3 lässt sich eine einfache Methode zur Konstruktion von Poisson-Prozessen mit endlichem Intensitätsmaß herleiten.

Korollar 2.1 Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$ ein beliebiges Maß mit $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, und $N : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ bzw. $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ seien unabhängige Zufallsvariablen mit

$$N \sim \text{Poi}(\mu(\mathbb{R}^d)), \quad S_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1. \quad (8)$$

Dann ist das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$N_B = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (9)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ .

Beweis

- Mit der Schreibweise

$$p(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (10)$$

ergibt sich aus (8) und (9), dass

$$P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) = \frac{k!}{k_0! k_1! \dots k_n!} p^{k_0}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n)$$

für jedes $n \geq 1$, für beliebige, paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und für $k_0, k_1, \dots, k_n \geq 0$ mit $k = k_0 + k_1 + \dots + k_n$, wobei $B_0 = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$.

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n) &= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} P(N = k) P(N_{B_1} = k_1, \dots, N_{B_n} = k_n \mid N = k) \\
&= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d)} \mu^k(\mathbb{R}^d)}{k!} \frac{k!}{(k - k_1 - \dots - k_n)! k_1! \dots k_n!} p^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0) p^{k_1}(B_1) \dots p^{k_n}(B_n) \\
&= \sum_{k=k_1+\dots+k_n}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B_0)} \mu^{k-k_1-\dots-k_n}(B_0)}{(k - k_1 - \dots - k_n)!} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) \\
&= \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d \setminus B_0)}}{k_1! \dots k_n!} \mu^{k_1}(B_1) \dots \mu^{k_n}(B_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\mu(B_i)} \mu^{k_i}(B_i)}{k_i!}.
\end{aligned}$$

- Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Formel (6) in Theorem 2.3, dann erkennt man, dass das in (9) gegebene zufällige Zählmaß die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen hat wie ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ .
- Hieraus und aus Theorem 2.1 ergibt sich nun die Behauptung. \square

Beachte

- Wenn das Intensitätsmaß μ in Korollar 2.1 die Form $\mu(B) = \lambda \nu_d(B \cap C)$ hat für ein $\lambda < \infty$ und eine beschränkte Borel-Menge $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(C) < \infty$, dann sind die in (8) betrachteten (unabhängigen) Zufallsvektoren S_1, S_2, \dots gleichverteilt in C .
- Wenn zusätzlich angenommen wird, dass die Menge C ein d -dimensionaler Quader der Form

$$C = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] \quad (11)$$

ist, dann hat der Zufallsvektor $S_i = (S_{i1}, \dots, S_{id})$ für jedes $i = 1, \dots, n$ unabhängige Komponenten S_{i1}, \dots, S_{id} , wobei $S_{ij} \sim U(a_j, b_j)$ für jedes $j = 1, \dots, d$.

- Die Aussage von Korollar 2.1 wird deshalb manchmal die *bedingte Gleichverteilungseigenschaft* von homogenen Poisson-Prozessen in beschränkten Borel-Mengen genannt.

Das folgende Resultat über die Summation von unabhängigen Poisson-Prozessen ist ein Analogon der Faltungsstabilität von Poisson-Verteilungen.

Theorem 2.4 Sei $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ eine Folge unabhängiger Poisson-Prozesse in \mathbb{R}^d mit den Intensitätsmaßen μ_1, μ_2, \dots , so dass das Maß $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ lokal endlich ist. Dann ist das zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ mit $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ .

Beweis

- Wir zeigen zunächst, dass

$$N_B \sim \text{Poi}(\mu(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (12)$$

- Weil $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ unabhängige Zählmaße sind, sind die Zufallsvariablen $N_B^{(1)}, N_B^{(2)}, \dots$ unabhängig, wobei $N_B^{(i)} \sim \text{Poi}(\mu_i(B))$ für jedes $i \geq 1$ und für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
- Aus der Faltungsstabilität von Poisson-Verteilungen ergibt sich somit, dass für jedes $n \geq 1$ und für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i(B)\right).$$

- Hieraus und aus der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ergibt sich, dass für beliebige $k \geq 0$ und $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} P(N_B \leq k) &= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)} \leq k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n N_B^{(i)} \leq k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\sum_{i=1}^n \mu_i(B)) (\sum_{i=1}^n \mu_i(B))^j}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{\exp(-\mu(B)) (\mu(B))^j}{j!}. \end{aligned}$$

- Damit ist (12) bewiesen.

- Um den Beweis zu beenden, ist noch zu zeigen, dass die Zufallsvariablen $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots, N_{B_n}$ für jedes $n \geq 2$ und paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ unabhängig sind.
 - Weil die Zufallsvariablen $\{N_{B_j}^{(i)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ für beliebige $m, n \geq 1$ unabhängig sind, ergibt sich aus dem Satz über die Unabhängigkeit zusammengesetzter Abbildungen (vgl. Theorem WR-3.18), dass auch die Zufallsvariablen $\{\sum_{i=1}^m N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n\}$ unabhängig sind.
 - Wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen kann man nun leicht zeigen, dass die Zufallsvariablen

$$\{N_{B_j}, j = 1, \dots, n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} N_{B_j}^{(i)}, j = 1, \dots, n \right\}$$

ebenfalls unabhängig sind. \square

Wir zeigen nun noch, dass die Einschränkung von Poisson-Prozessen auf Borelsche Teilmengen des \mathbb{R}^d erneut zu Poisson-Prozessen führt.

Theorem 2.5 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ , und sei $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige Borel-Menge. Dann ist das zufällige Zählmaß $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit $\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß $\tilde{\mu}$, wobei $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap B_0)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis

- Weil $\{N_B\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist, gilt

$$\tilde{N}_B = N_{B \cap B_0} \sim \text{Poi}(\mu(B \cap B_0)) = \text{Poi}(\tilde{\mu}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

- Weil für beliebige paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ auch die Mengen $B_1 \cap B_0, \dots, B_n \cap B_0$ paarweise disjunkt sind, sind die Zufallsvariablen $\tilde{N}_{B_1} = N_{B_1 \cap B_0}, \dots, \tilde{N}_{B_n} = N_{B_n \cap B_0}$ unabhängig. \square

2.1.3 Messbare Indizierung der Atome

In diesem Abschnitt betrachten wir den Begriff der messbaren Indizierung der (zufälligen) Atome von Poisson-Prozessen, der einen konstruktiven Zugang zu Poisson-Prozessen im \mathbb{R}^d und somit die mathematische Grundlage von Simulationsalgorithmen bildet, vgl. auch die Abschnitte 2.1.4 und 2.1.5.

Beachte Man sagt, dass die Folge $\{\tilde{S}_i\}$ von Zufallsvektoren $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i, & \text{falls } N \geq i, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad (13)$$

eine *messbare Indizierung* der (zufälligen) Atome des in (9) gegebenen zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ ist.

Von nun an werden wir stets voraussetzen, dass das Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ *diffus* ist, d.h., es gelte

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (14)$$

Der folgende Hilfssatz wird manchmal *Disjunktheitstheorem* genannt. Wir nutzen dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass man auch für Poissonsche Zählmaße mit einem beliebigen (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß eine messbare Indizierung der Atome konstruieren kann.

Lemma 2.1

- Seien $\{N_B^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ und $\{N_B^{(2)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitätsmaßen μ_1 bzw. μ_2 , so dass $0 < \mu_1(\mathbb{R}^d), \mu_2(\mathbb{R}^d) < \infty$.
- Außerdem seien $\{\tilde{S}_i^{(1)}\}$ und $\{\tilde{S}_i^{(2)}\}$ unabhängige messbare Indizierungen der Atome von $\{N_B^{(1)}\}$ bzw. $\{N_B^{(2)}\}$, die gemäß (13) gegeben sind.
- Dann gilt für beliebige $i, j \geq 1$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} \neq \tilde{S}_j^{(2)}\} \cup \{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)} = \infty\}) = 1. \quad (15)$$

Beweis

- Es genügt zu zeigen, dass für beliebige $i, j \geq 1$ mit $i \neq j$

$$P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) = 0.$$

- Mit der Schreibweise $p^{(k)}(B) = \mu_k(B)/\mu_k(\mathbb{R}^d)$ für $k = 1, 2$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ergibt sich aus der Unabhängigkeit der Zufallsvektoren $\tilde{S}_i^{(1)}$ und $\tilde{S}_j^{(2)}$, dass

$$\begin{aligned} P(\{\tilde{S}_i^{(1)} = \tilde{S}_j^{(2)}\} \cap \{\tilde{S}_j^{(2)} \neq \infty\}) &= P(\{S_i^{(1)} = S_j^{(2)}\} \cap \{N^{(2)} \geq j\}) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)}) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = S_j^{(2)} \mid S_j^{(2)} = s) P(S_j^{(2)} \in ds) \\ &= P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} P(S_i^{(1)} = s) p^{(2)}(ds) = P(N^{(2)} \geq j) \int_{\mathbb{R}^d} p^{(1)}(\{s\}) p^{(2)}(ds) = 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit die Tatsache genutzt wurde, dass das Intensitätsmaß μ_1 diffus ist und dass somit $p^{(1)}(\{s\}) = 0$ für jedes $s \in \mathbb{R}^d$. \square

Beachte Aus Lemma 2.1 ergibt sich insbesondere, dass durch $\{\tilde{S}_i\}$ mit

$$\tilde{S}_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} \geq i, \\ S_{i - N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N_{\mathbb{R}^d}^{(1)} + N_{\mathbb{R}^d}^{(2)} \geq i > N_{\mathbb{R}^d}^{(1)}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (16)$$

eine messbare Indizierung der Atome des zufälligen Maßes $\{N_B\}$ mit $N_B = N_B^{(1)} + N_B^{(2)}$ gegeben ist.

Wir übertragen nun den in (16) gegebenen Ansatz auf den Fall von beliebigen (endlichen bzw. abzählbar unendlichen) Summen unabhängiger Poisson-Prozesse.

Theorem 2.6 Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ein beliebiges diffuses und lokal endliches Maß. Dann gibt es eine Folge $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ von Zufallsvektoren, so dass das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$N_B = \#\{i : S_i \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (17)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist.

Beweis

- Man kann sich leicht überlegen, dass sich μ als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Mäßen $\mu_1, \mu_2, \dots : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$ darstellen lässt, so dass

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (18)$$

- Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\mu_j(\mathbb{R}^d) > 0$ für jedes $j \geq 1$.
- Gemäß Korollar 2.1 gibt es dann für jedes $j \geq 1$ unabhängige Zufallsvariablen $N^{(j)}, S_1^{(j)}, S_2^{(j)}, \dots$ mit

$$N^{(j)} \sim \text{Poi}(\mu_j(\mathbb{R}^d)), \quad S_i^{(j)} \sim \frac{\mu_j(\cdot)}{\mu_j(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1,$$

– so dass durch den Ansatz

$$N_B^{(j)} = \#\{i : 1 \leq i \leq N^{(j)}, S_i^{(j)} \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess $\{N_B^{(j)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit dem Intensitätsmaß μ_j gegeben ist.

– Dabei können die Folgen $\{N^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots\}, \{N^{(2)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots\}, \dots$ so gewählt werden, dass sie ihrerseits unabhängig sind.

– Damit sind auch die Poisson-Prozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ unabhängig.

- Aus Theorem 2.4 ergibt sich nun, dass das zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ mit $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist.
- Darüber hinaus ergibt sich aus Lemma 2.1, dass durch die Folge $\{S_i\}$ von Zufallsvektoren mit

$$S_i = \begin{cases} S_i^{(1)}, & \text{falls } N^{(1)} \geq i, \\ S_{i-N^{(1)}}^{(2)}, & \text{falls } N^{(1)} + N^{(2)} \geq i > N^{(1)}, \\ \vdots & \\ S_{i-N^{(1)}-\dots-N^{(j-1)}}^{(j)}, & \text{falls } N^{(1)} + \dots + N^{(j)} \geq i > N^{(1)} + \dots + N^{(j-1)} \text{ für ein } j > 2, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$ gegeben ist, so dass (17) gilt. \square

2.1.4 Simulationsalgorithmus; Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit dem (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß μ , und seien $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$ paarweise disjunkte Quader mit der in (1) gegebenen Form, so dass $\mu(B_i) > 0$ für jedes $i = 1, \dots, n$.

Um den Poisson-Prozess $\{N_B\}$ in der beschränkten Borel-Menge $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$ zu simulieren, genügt es zu beachten,

- dass das zufällige Zählmaß $\{\tilde{N}_B\}$ mit $\tilde{N}_B = N_{B \cap C}$ gemäß Theorem 2.5 ein Poisson-Prozess mit dem endlichen Zählmaß $\tilde{\mu}$ ist wobei $\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap C)$,
- und dass man deshalb gemäß Theorem 2.3 bzw. Korollar 2.1 wie folgt vorgehen kann:

Schritt 0 Generiere eine Realisierung von $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$.

Schritt 1 Falls $N_C = k$, dann generiere eine Realisierung des multinomial verteilten Zufallsvektors

$$(N_1, \dots, N_n) \sim \text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n),$$

wobei $p_i = \mu(B_i)/\mu(C)$ für jedes $i = 1, \dots, n$.

Schritt 2 Falls $(N_1, \dots, N_n) = (k_1, \dots, k_n)$, dann generiere

$$k_1 \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)} \sim \mu(\cdot \cap B_1)/\mu(B_1),$$

\vdots

$$k_n \text{ unabhängige Zufallsvektoren } S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)} \sim \mu(\cdot \cap B_n)/\mu(B_n),$$

wobei die Zufallsvektoren $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$ ebenfalls unabhängig sind.

Beachte

- Seien $(s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}), \dots, (s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)})$ Realisierungen von $(S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}), \dots, (S_1^{(n)}, \dots, S_{k_n}^{(n)})$.
- Dann ist die (nichtgeordnete) Menge $\{s_1^{(1)}, \dots, s_{k_1}^{(1)}, \dots, s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)}\}$ von Punkten im \mathbb{R}^d eine Realisierung der Atome des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ in der Menge $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Wenn die Anzahl n der Quader $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{Q}^d$ groß ist, aus denen die Menge $C = \bigcup_{i=1}^n B_i$ besteht, dann kann die praktische Umsetzung der Simulationsschritte 1 und 2 mit einem großen Rechenaufwand verbunden sein.

- In diesem Fall kann es effizienter sein, den Poisson-Prozess $\{N_B\}$ mit der folgenden *Akzeptanz- und Verwerfungsmethode* in C zu simulieren.
- Diese Methode hat darüber hinaus den Vorteil, dass das Gebiet $C \subset \mathbb{R}^d$, in dem Poisson-Prozess $\{N_B\}$ simuliert wird, eine *beliebige* beschränkte Borel-Menge sein kann.
 - Sei also $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ein beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß, sei $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit $0 < \mu(C) < \infty$, und sei

$$\tilde{C} = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$$

ein (beschränkter) d -dimensionaler Quader mit $C \subset \tilde{C}$.

- Um den Poisson-Prozess $\{N_B\}$ in der Menge C zu simulieren, kann man nun gemäß Theorem 2.5 wie folgt vorgehen:

Schritt 0 Generiere eine Realisierung von $N_C \sim \text{Poi}(\mu(C))$.

Schritt 1 Falls $N_C = k$, dann generiere so lange Realisierungen s_1, s_2, \dots der unabhängigen Zufallsvektoren $S_1, S_2, \dots \sim \mu(\cdot \cap \tilde{C})/\mu(\tilde{C})$, bis k der Pseudozufallszahlen s_1, \dots, s_n in der Menge C liegen, wobei

$$n = \min_{j \geq 1} \{ \#\{i : s_i \in C, 1 \leq i \leq j\} \geq k \}.$$

Schritt 2 Dann ist die (nichtgeordnete) Menge $\{s_i : s_i \in C, 1 \leq i \leq n\}$ von Punkten im \mathbb{R}^d eine Realisierung der Atome des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ in der Menge C .

2.1.5 Transformationssätze

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei verschiedene Arten von Transformationen von Poisson-Prozessen im \mathbb{R}^d .

Für beliebige $d, d' \geq 1$ seien die Borel-Mengen $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $E' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$ gegeben.

- Außerdem sei $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$ eine Borel-messbare Abbildung, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') = \{x \in E : \mathbf{T}(x) \in B'\} \in \mathcal{B}(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'),$$

- wobei die Urbilder von beschränkten Borel-Mengen beschränkt seien, d.h., es gelte

$$\mathbf{T}^{-1}(B') \in \mathcal{B}_0(E) \quad \forall B' \in \mathcal{B}_0(E').$$

Beachte Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein beliebiges Zählmaß in E mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, \infty]$. Man kann sich leicht überlegen, dass dann durch den Ansatz

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E') \tag{19}$$

ein zufälliges Zählmaß $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$ in E' gegeben ist, wobei das Intensitätsmaß $\mu' : \mathcal{B}(E') \rightarrow [0, \infty]$ von $\{N'_{B'}\}$ gegeben ist durch

$$\mu'(B') = \mathbb{E} N'_{B'} \stackrel{(19)}{=} \mathbb{E} N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \mu(\mathbf{T}^{-1}(B')) \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E'). \tag{20}$$

Theorem 2.7 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein Poisson-Prozess in E mit dem (diffusen und lokal endlichem) Intensitätsmaß μ .

- Dann ist das in (19) gegebene zufällige Zählmaß $\{N'_{B'}, B' \in \mathcal{B}(E')\}$ ein Poisson-Prozess in E' , dessen Intensitätsmaß μ' durch (20) gegeben ist.
- Wenn $\{S_i\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$ ist und wenn die Abbildung $\mathbf{T} : E \rightarrow E'$ eindeutig ist, dann ist durch

$$S'_i = \mathbf{T}'(S_i) \tag{21}$$

eine messbare Indizierung $\{S'_i\}$ der Atome von $\{N'_{B'}\}$ gegeben, wobei die Abbildung $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{T}'(x) = \begin{cases} \mathbf{T}(x), & \text{falls } x \in E, \\ \infty, & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

Beweis

- Offenbar gilt $N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} \sim \text{Poi}(\mu(\mathbf{T}^{-1}(B')))$.
- Wenn $B'_1, \dots, B'_n \in \mathcal{B}'_0(E')$ paarweise disjunkte Borel-Mengen sind, dann sind auch die Urbilder $\mathbf{T}^{-1}(B'_1), \dots, \mathbf{T}^{-1}(B'_n)$ paarweise disjunkt und die Zufallsvariablen

$$N'_{B'_1} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_1)}, \dots, N'_{B'_n} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B'_n)}$$

sind somit unabhängig.

- Außerdem ist die Abbildung $S'_i = \mathbf{T}'(S_i) : \Omega \rightarrow E' \cup \{\infty\}$ für jedes $i \geq 1$ messbar, weil die Abbildungen $S_i : \Omega \rightarrow E \cup \{\infty\}$ und $\mathbf{T}' : E \cup \{\infty\} \rightarrow E' \cup \{\infty\}$ messbar sind, und es gilt für jedes $B' \in \mathcal{B}(E')$

$$N'_{B'} = N_{\mathbf{T}^{-1}(B')} = \#\{i : S_i \in \mathbf{T}^{-1}(B')\} = \#\{i : \mathbf{T}'(S_i) \in B'\}.$$

- Also ist $\{\mathbf{T}'(S_i)\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N'_{B'}\}$. □

Beispiele Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein homogener Poisson-Prozess in $E = (0, \infty)$ mit der Intensität $\lambda = 1$.

1. Sei $E' = E = (0, \infty)$ und $\mathbf{T}(x) = x^2$.

- Dann ist $\{N'_{B'}\}$ ein Poisson-Prozess in $(0, \infty)$.
- Das Intensitätsmaß μ' von $\{N'_{B'}\}$ ist absolutstetig bezüglich dem (1-dimensionalen) Lebesgue-Maß $\nu_1(\cdot \cap (0, \infty))$, wobei die Dichte gegeben ist durch

$$\frac{d\mu'}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0.$$

2. Sei $E' = E \times E$ und die Abbildung $\mathbf{T} : E \rightarrow E \times E$ sei gegeben durch $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$.

- Dann ist die Folge $\{S_i\}$ der Sprungzeitpunkte des (Poissonschen) Zählprozesses $\{N_t, t > 0\}$ mit $N_t = N_{(0,t]}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$.
- Außerdem ist $\{S'_i\} = \{(S_i, S_i^2)\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses $\{N'_{B'}\}$ in $(0, \infty)^2$,
- dessen Intensitätsmaß μ' auf dem Funktionsgraphen $\{(x, x^2) : x > 0\}$ konzentriert ist.
- Beachte: Das heißt insbesondere, dass die Atome von $\{N'_{B'}\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 in einer 1-dimensionalen Teilmenge von $(0, \infty)^2$ liegen; vgl. Abbildung 5.

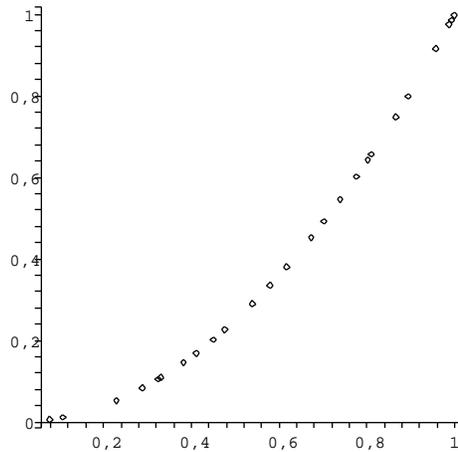


Abbildung 5: Poisson-Prozess auf der Parabel $\mathbf{T}(x) = (x, x^2)$

Wir betrachten nun noch eine andere Art der Transformation von Poisson-Prozessen im \mathbb{R}^d , mit deren Hilfe man Poisson-Prozesse $\{N'_{B'}\}$ in höherdimensionalen Räumen $E' \subset \mathbb{R}^{d'}$ mit $d' > d$ konstruieren kann, so dass der Träger des Intensitätsmaßes μ' von $\{N'_{B'}\}$ eine d' -dimensionale Menge ist.

Theorem 2.8

- Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(E)\}$ ein Poisson-Prozess in $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit dem Intensitätsmaß μ , so dass $\mu(E) > 0$, und sei $\{S_i\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$.
- Außerdem sei $m \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl und $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren mit der Verteilung P_U , die von $\{S_i\}$ unabhängig sind.
- Dann ist durch

$$N'(B \times C) = \#\{i : (S_i, U_i) \in B \times C\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad (22)$$

ein Poisson-Prozess $\{N'_{B'}\}$ in $E' = E \times \mathbb{R}^m$ mit dem Intensitätsmaß $\mu' = \mu \times P_U$ gegeben.

Beweis

- Wir betrachten zunächst den Fall, dass μ ein endliches Maß ist.
 - Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass die messbare Indizierung $\{S_i\}$ der Atome von $\{N_B\}$ durch (8) und (13) gegeben ist.
 - Dann sind die Zufallsvektoren S'_1, S'_2, \dots mit $S'_i = (S_i, U_i)$ unabhängig, und es gilt

$$S'_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)} \times P_U \quad \forall i \geq 1.$$

- Aus Korollar 2.1 ergibt sich nun, dass durch den Ansatz

$$N'_{B'} = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S'_i \in B'\} \quad \forall B' \in \mathcal{B}(E \times \mathbb{R}^m)$$

ein Poisson-Prozess $N'_{B'}$ in $E' = E \times \mathbb{R}^m$ mit dem Intensitätsmaß μ' gegeben ist, wobei

$$\mu'(B \times C) = \mu(E) \left(\frac{\mu(B)}{\mu(E)} \times P_U(C) \right) = \mu(B) \times P_U(C) \quad \forall B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

- Damit ist die Behauptung unter der zusätzlichen Annahme bewiesen, dass μ endlich ist.
- Wenn μ ein beliebiges (diffuses und lokal endliches) Maß ist,
 - dann können wir $\mu' = \mu \times P_U$ als (abzählbar unendliche) Summe von endlichen Mäßen μ'_1, μ'_2, \dots darstellen
 - und anschließend so wie im Beweis von Theorem 2.6 vorgehen. □

Beachte

- Ähnlich wie bei zusammengesetzten Poisson-Prozessen in $[0, \infty)$, die in Abschnitt WT-2.2.2 eingeführt worden sind, können die in Theorem 2.8 betrachteten Zufallsvariablen U_i als „Marken“ der Atome S_i aufgefasst werden.
- Dabei sagt man, dass die Folge $\{(S_i, U_i)\}$ der markierten Atome eine messbare Indizierung eines *unabhängig markierten* Poisson-Prozesses ist.

2.2 Homogene Poisson-Prozesse**2.2.1 Radiale Simulation**

Mit Hilfe der Theoreme 2.7 und 2.8 konstruieren wir einen Algorithmus zur *radialen Simulation* von homogenen Poisson-Prozessen im \mathbb{R}^2 .

- Sei $T_1, T_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $T_i \sim \text{Exp}(1)$ für jedes $i \geq 1$.

- Für jedes $\lambda > 0$ ergibt sich dann aus Theorem 2.7, dass durch

$$N_B = \# \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \in B \right\} \quad \forall B \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

ein Poisson-Prozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}([0, \infty))\}$ in $[0, \infty)$ gegeben ist, dessen Intensitätsmaß μ absolutstetig ist mit der Dichte

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = 2\pi\lambda x \quad \forall x \geq 0.$$

- Dabei ist durch

$$S_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{T_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1$$

eine messbare Indizierung $\{S_i\}$ der Atome von $\{N_B\}$ gegeben.

- Außerdem sei $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 2\pi)$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $U_i \sim U([0, 2\pi))$, die unabhängig von $\{T_i\}$ ist.
- Dann ergibt sich aus Theorem 2.8, dass $\{(S_i, U_i)\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ ist, dessen Intensitätsmaß durch $\mu \times U(0, 2\pi)$ gegeben ist.
- Die erneute Anwendung von Theorem 2.7 auf die Abbildung $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{T}(s, u) = (s \cos u, s \sin u) \quad \forall s \geq 0, u \in [0, 2\pi) \quad (23)$$

ergibt schließlich, dass $\{\mathbf{T}(S_i, U_i)\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses im \mathbb{R}^2 mit der Intensität λ ist.

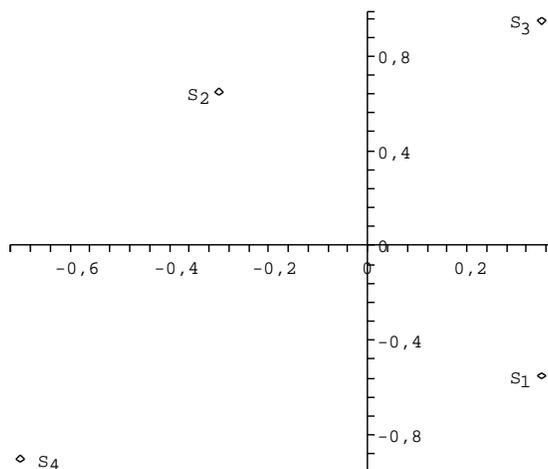


Abbildung 6: Radiale Simulation von homogenen Poisson-Prozessen

Um einen homogenen Poisson-Prozess mit der Intensität λ im Kreis $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$ mit Radius $r > 0$ zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen:

Schritt 0 Generiere die Pseudozufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \max \left\{ i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r \right\}.$$

Schritt 1 Generiere die Pseudozufallszahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $U(0, 2\pi)$.

Schritt 2 Berechne die Vektoren $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$, wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

Schritt 3 Transformiere die Vektoren $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$ mit Hilfe der in (23) gegebenen Abbildung $\mathbf{T} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Schritt 4 Generiere so die Realisierung $\mathbf{T}(s_1, u_1), \dots, \mathbf{T}(s_{n(r)}, u_{n(r)})$ eines (2-dimensionalen) homogenen Poisson-Prozesses im Kreis $B(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$; vgl. Abbildung 6.

2.2.2 Schätzung der Intensität; Signifikanztests

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$. Aus der Definitionsgleichung (4) von λ ergibt sich dann unmittelbar, dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (24)$$

für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ ist. Außerdem hat der Schätzer $\hat{\lambda}_W$ die folgenden Güteeigenschaften.

Theorem 2.9

- Sei W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist der erwartungstreue Schätzer $\hat{\lambda}_{W_n}$

1. schwach konsistent, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0, \quad (25)$$

2. asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{|W_n|}{\lambda}} (\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x), \quad (26)$$

wobei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

- Wenn $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ist, dann ist der Schätzer $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent, d.h., es gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda\right) = 1. \quad (27)$$

Beweis

- Die Gültigkeit von (25) ergibt sich aus der Tschebyschew–Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18), denn es gilt für $n \rightarrow \infty$

$$P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n}}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2 \cdot \nu_d(W_n)} \longrightarrow 0.$$

- Beim Beweis von (26) kann man die Charakterisierung der Verteilungskonvergenz durch charakteristische Funktionen nutzen (vgl. Theorem WR-5.7). Es genügt also zu zeigen, dass die charakteristische Funktion von $\sqrt{|W_n|/\lambda} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$ punktweise gegen die charakteristische Funktion der $N(0, 1)$ -Verteilung strebt.
- Wenn $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ist, dann gibt es
 - eine Folge von paarweise disjunkten Borel–Mengen $U_1, U_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(U_n) = 1$ für $n \geq 1$
 - und eine monotone Folge k_1, k_2, \dots natürlicher Zahlen mit $k_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{k_n} U_i \subset W_n \quad \text{und} \quad \nu_d\left(W_n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_i\right) \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

- Darüber hinaus gibt es
 - eine Folge von paarweise disjunkten Borel–Mengen $V_1, V_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(V_n) = 1$ für jedes $n \geq 1$
 - und eine monotone Folge ℓ_1, ℓ_2, \dots natürlicher Zahlen mit $\ell_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{\ell_n} V_i \supset W_n \quad \text{und} \quad \nu_d\left(\bigcup_{i=1}^{\ell_n} V_i \setminus W_n\right) \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

- Somit gilt

$$\frac{k_n}{\nu_d(W_n)} \frac{\sum_{i=1}^{k_n} N_{U_i}}{k_n} \leq \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} \leq \frac{\ell_n}{\nu_d(W_n)} \frac{\sum_{i=1}^{\ell_n} N_{V_i}}{\ell_n} \quad \forall n \geq 1. \quad (28)$$

- Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen (vgl. Theorem WR-5.15) ergibt sich nun, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k_n} N_{U_i}}{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{\ell_n} N_{V_i}}{\ell_n} = \lambda.$$

- Weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n}{\nu_d(W_n)} = 1,$$

ergibt sich hieraus und aus (28), dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} = \lambda. \quad \square$$

Beachte

- Aus Theorem 2.9 ergibt sich der folgende asymptotische *Signifikanztest* zur Verifizierung des Hypothesenpaars $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

- Mit Hilfe des Satzes von Slutsky (vgl. Theorem WR-5.11) ergibt sich aus (26) und (27), dass die Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{|W|}{\widehat{\lambda}_W}} (\widehat{\lambda}_W - \lambda_0) \quad (29)$$

näherungsweise standardnormalverteilt ist, wenn das Beobachtungsfenster W hinreichend groß ist.

- Somit wird H_0 abgelehnt, wenn $|T| > z_{1-\alpha/2}$, wobei z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.
- Wenn W nicht groß genug ist, so dass die Verteilung der in (29) betrachteten Testgröße T zu stark von der Standardnormalverteilung abweicht, dann kann der folgende *Monte-Carlo-Test* betrachtet werden, um das Hypothesenpaar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ zu verifizieren.
 - Für $\alpha = 0.05$ werden 99 Realisierungen eines homogenen Poisson-Prozesses mit der (hypothetischen) Intensität λ_0 in W generiert und die zugehörigen Realisierungen t_1, \dots, t_{99} der Testgröße $|T|$ berechnet.
 - Sei t_0 diejenige Realisierung von $|T|$, die sich für die (eentlichen) Daten ergibt, und sei ρ_0 der Rang von t_0 in der (geordneten) Stichprobe t_0, t_1, \dots, t_{99} .
 - Wenn $\rho_0 > 95$, dann wird H_0 abgelehnt.
 - Für $\alpha = 0.01$ werden 999 Realisierungen t_1, \dots, t_{999} der Testgröße $|T|$ generiert, wobei dann H_0 abgelehnt wird, wenn $\rho_0 > 990$.

2.3 Poisson-Prozesse mit absolutstetigem Intensitätsmaß

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass das Intensitätsmaß μ des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ absolutstetig bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., es gibt eine Borel-messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (30)$$

wobei $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die *Intensitätsfunktion* von $\{N_B\}$ genannt wird.

2.3.1 Ortsabhängige Verdünnung von Poisson-Prozessen; Simulationsalgorithmus

Aus den Transformationssätzen, die in Abschnitt 2.1.5 hergeleitet worden sind, ergibt sich die folgende Invarianzeigenschaft von Poisson-Prozessen bezüglich ortsabhängiger Verdünnung, vgl. Abbildung 7.

Theorem 2.10

- Seien $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ zwei Borel-messbare und lokal-integrierbare Funktionen, so dass

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (31)$$

- Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion λ_1 .
- Außerdem sei $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$ eine Folge von unabhängigen und im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen, die von $\{S_n\}$ unabhängig ist.
- Dann ist das zufällige Zählmaß $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (32)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion λ_2 .

Beweis

- Aus Theorem 2.8 ergibt sich, dass $\{(S_n, U_n)\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ mit der Intensitätsfunktion $\lambda(x, u) = \lambda_1(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$ ist.
- Aus Theorem 2.7 ergibt sich nun, dass $\{(S_n, U'_n)\}$ mit

$$U'_n = \begin{cases} U_n, & \text{falls } U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n), \\ 2, & \text{falls } U_n > \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n) \end{cases}$$

eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses in $\mathbb{R}^d \times ([0, 1] \cup \{2\})$ ist, dessen Intensitätsmaß μ' gegeben ist durch

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[0, \lambda_2(x)/\lambda_1(x)]}(u) \, du \, \lambda_1(x) \, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Hieraus folgt, dass

$$\mu'(B \times [0, 1]) = \int_B \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \lambda_1(x) \, dx = \int_B \lambda_2(x) \, dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Damit ist gezeigt, dass $\{\tilde{N}_B\}$ ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion λ_2 ist. □

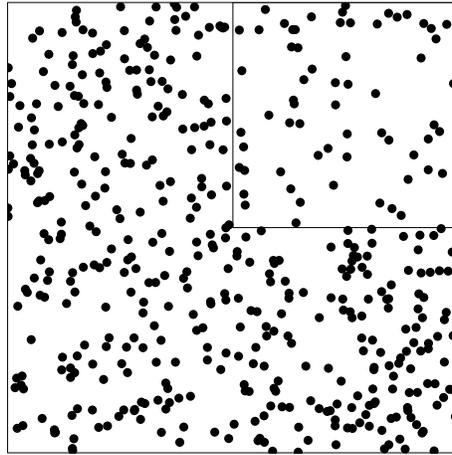


Abbildung 7: Ortsabhängige Verdünnung der Punkte; $p(x) = 1$ bzw. $p(x) = 0.5$

Mit Hilfe von Theorem 2.10 lässt sich ein Algorithmus zur Simulation von Poisson-Prozessen angeben, deren Intensitätsfunktion eine beschränkte Funktion ist. Hierfür ist das folgende Korollar nützlich, dass sich unmittelbar aus Theorem 2.10 ergibt.

Korollar 2.2

- Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität λ .
- Sei $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, 1]$ eine Folge von unabhängigen und in $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen, die von $\{S_n\}$ unabhängig ist, und sei $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ eine Borel-messbare Funktion.

- Dann ist das zufällige Zählmaß $\{\tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$\tilde{N}_B = \#\{n : S_n \in B, U_n \leq p(S_n)\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (33)$$

ein Poisson-Prozess, dessen Intensitätsfunktion $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben ist durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (34)$$

Um einen Poisson-Prozess mit einer vorgegebenen beschränkten Intensitätsfunktion $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$ in einer beschränkten Borel-Menge $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ zu simulieren, kann man also wie folgt vorgehen, vgl. auch Abbildung 7:

Schritt 0 Generiere die Realisierungen $s_1, s_2, \dots, s_k \in C$ der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses $\{S_n\}$ in C , dessen Intensität λ_{\max} gegeben ist durch

$$\lambda_{\max} = \sup_{x \in C} \lambda(x) < \infty.$$

Schritt 1 Generiere die Realisierungen $u_1, u_2, \dots, u_k \in [0, 1]$ der unabhängigen und in $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen U_1, U_2, \dots, U_k .

Schritt 2 Eliminiere diejenigen Punkte s_n , für die $u_n > \lambda(s_n)/\lambda_{\max}$ gilt.

Schritt 3 Die verbleibenden Punkte $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_m}\} \subset \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ bilden dann eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion $\lambda : C \rightarrow [0, \infty)$ in der Menge C .

2.3.2 Nichtparametrische Schätzung der Intensitätsfunktion; Randkorrektur

- Sei $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine offene Menge mit $0 < \nu_d(W) < \infty$, und sei S_1, S_2, \dots eine messbare Indizierung der Atome eines Poisson-Prozesses $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ im Beobachtungsfenster W mit der Intensitätsfunktion $\lambda : W \rightarrow [0, \infty)$.
- Ein erster (nicht randkorrigierter) Ansatz zur Schätzung des Intensitätswertes $\lambda(x)$ für $x \in W$ ist gegeben durch

$$\tilde{\lambda}_h(x) = \frac{N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d h^d} \quad \forall x \in W, \quad (35)$$

wobei $B(x, h) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq h\}$ die Kugel mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Radius $h > 0$ ist und $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$ das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Beachte

- Der in (35) gegebene Schätzer $\tilde{\lambda}_h(x)$ für $\lambda(x)$ ist im allgemeinen *nicht* erwartungstreu.
 - Wenn $\lambda : W \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion ist, dann gilt jedoch für jedes $x \in W$

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \tilde{\lambda}_h(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E} N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d h^d} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_{B(x,h) \cap W} \lambda(y) dy}{\kappa_d h^d} = \lambda(x), \quad (36)$$

d.h., $\tilde{\lambda}_h(x)$ ist asymptotisch erwartungstreu.

- Andererseits gilt aber

$$\lim_{h \downarrow 0} \text{Var} \tilde{\lambda}_h(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\text{Var} N_{B(x,h) \cap W}}{\kappa_d^2 h^{2d}} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\int_{B(x,h) \cap W} \lambda(y) dy}{\kappa_d^2 h^{2d}} = \infty \quad \forall x \in W. \quad (37)$$

- Der Radius $h > 0$ sollte deshalb so gewählt werden, dass der *mittlere quadratische Fehler* $e_h(x)$ des Schätzers $\tilde{\lambda}_h(x)$ möglichst klein ist, wobei

$$e_h(x) = \mathbb{E} \left((\tilde{\lambda}_h(x) - \lambda(x))^2 \right). \quad (38)$$

- Ein weiteres Problem des in (35) gegebenen Schätzers $\tilde{\lambda}_h(x)$ besteht darin, dass er *Randeffekte* aufweist,
 - weil im allgemeinen $\nu_d(B(x, h) \cap W) < \kappa_d h^d$ für Lokationen $x \in W$ gilt, die nahe am Rand ∂W des Beobachtungsfensters W liegen,
 - und dass dann die Normierung $\kappa_d h^d$ in (35) zu groß ist.
- Deshalb wird anstelle von $\tilde{\lambda}_h(x)$ ein *randkorrigierter Schätzer* $\hat{\lambda}_h(x)$ für $\lambda(x)$ betrachtet, wobei

$$\hat{\lambda}_h(x) = \frac{N_{B(x, h) \cap W}}{\nu_d(B(x, h) \cap W)} \quad \forall x \in W. \quad (39)$$

Die in (35) bzw. (39) betrachteten Schätzer $\tilde{\lambda}_h(x)$ und $\hat{\lambda}_h(x)$ können als spezielle *Kernschätzer* für $\lambda(x)$ aufgefasst werden.

Definition Unter einer *Kernfunktion* $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ versteht man eine radial-symmetrische Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} k(x) dx = 1.$$

Beispiele

1. Dichte der multivariaten Standardnormalverteilung

$$k(x) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^\top x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

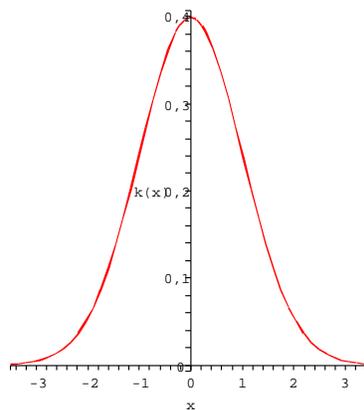
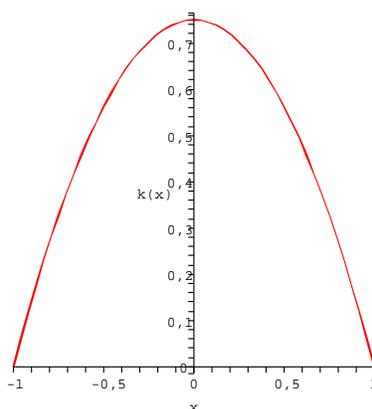


Abbildung 8: Dichte der Standardnormalverteilung; $d = 1$

2. Epanechnikov-Kern

$$k(x) = \begin{cases} \frac{d+2}{2\kappa_d} (1 - x^\top x), & \text{falls } x^\top x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 9: Epanechnikov-Kern; $d = 1$ **Beachte**

- Die in (35) bzw. (39) betrachteten Schätzer $\tilde{\lambda}_h(x)$ und $\hat{\lambda}_h(x)$ können in der Form

$$\tilde{\lambda}_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_W} k((x - S_i)/h)}{\int_{\mathbb{R}^d} k((x - y)/h) dy} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\lambda}_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_W} k((x - S_i)/h)}{\int_W k((x - y)/h) dy} \quad (40)$$

geschrieben werden,

- wobei die Kernfunktion $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben ist durch

$$k(x) = \kappa_d^{-1} \mathbb{1}_{B(o,1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- Der Parameter $h > 0$ in (40) heißt *Bandbreite* des Kernschätzers.

- In den meisten Fällen ist die optimale Wahl der Bandbreite (z.B. im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers, vgl. (38)) wesentlich wichtiger hinsichtlich der Güteeigenschaften von Kernschätzern, als die Wahl der einen oder anderen spezifischen Kernfunktion $k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$.
- Ein populäres Verfahren zur Bestimmung einer optimalen Bandbreite $h > 0$ ist die Methode der *Likelihood-Cross-Validation*. Dabei wird ein (von der Lage der Punkte S_1, \dots, S_{N_W} abhängender) Schätzer \hat{h} für h bestimmt, der Lösung des folgenden Maximierungsproblems ist.
 - Für jedes $i = 1, \dots, N_W$ wird die Teilstichprobe $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_{N_W}$ betrachtet und der Wert $\hat{\lambda}_h^{(i)}(S_i)$ von $\hat{\lambda}_h(x)$ an der Stelle $x = S_i$ auf der Basis dieser Teilstichprobe berechnet.
 - Wenn die Loglikelihood-Funktion

$$L(h) = \sum_{i=1}^{N_W} \log(\hat{\lambda}_h^{(i)}(S_i))$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 ein eindeutig bestimmtes Maximum im Intervall $(0, \infty)$ hat,

- dann ist der Schätzer \hat{h} derjenige Wert $h > 0$, für den die Funktion $L(h)$ dieses Maximum annimmt.

3 Zufällige Punktprozesse

3.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

- Sei $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ eine beliebige Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , so dass

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (1)$$

- Dann sagt man, dass $\{S_n\}$ ein *zufälliger Punktprozess* in \mathbb{R}^d ist, wobei durch den Ansatz

$$N_B = \#\{n : S_n \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (2)$$

ein (lokal endliches) zufälliges Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ gegeben ist.

- Wenn zusätzlich zu der lokalen Endlichkeitsbedingung (1) gilt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j, \quad (3)$$

dann wird $\{S_n\}$ ein *einfacher* zufälliger Punktprozess genannt.

- *Beachte.* Für einfache Punktprozesse kann die Folge $\{S_n\}$ als eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$ aufgefasst werden.

3.1.1 Intensitätsmaß und Campbellsches Theorem

- Ähnlich wie bei Poisson-Prozessen (vgl. Abschnitt 2.1) kann man auch für beliebige Punktprozesse $\{S_n\}$ bzw. für die zugehörigen Zählmaße $\{N_B\}$ den Begriff des *Intensitätsmaßes* $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ einführen, wobei

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (4)$$

- Dabei wird stets vorausgesetzt, dass das Intensitätsmaß μ lokal endlich ist.

Das folgende Resultat wird in der Literatur das *Campbellsche Theorem* genannt. Es ist eine spezielle Version des Satzes von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.

Theorem 3.1

- Sei $\{S_n\}$ ein Punktprozess mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, und sei $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \rightarrow [0, \infty)$ eine nichtnegative Borel-messbare Funktion mit $f(\infty) = 0$.
- Dann gilt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx), \quad (5)$$

d.h., $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer des Integrals $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(dx)$.

Beweis

- Die Gültigkeit von (5) lässt sich mit algebraischer Induktion zeigen.
- Wenn f eine Indikatorfunktion ist, dann ergibt sich (5) unmittelbar aus der Definitionsgleichung (4) des Intensitätsmaßes μ .
- Somit gilt (5) auch für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen.
- Weil sich jede nichtnegative Borel-messbare Funktion durch eine monoton wachsende Folge solcher Linearkombinationen von Indikatorfunktionen approximieren lässt, ergibt sich die Behauptung nun aus dem Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz. \square

3.1.2 Erzeugendes Funktional

Ein wichtiges analytisches Tool bei der Untersuchung von Punktprozessen ist das erzeugende Funktional, das eine Verallgemeinerung der erzeugenden Funktion von nichtnegativen ganzzahligen Zufallsvariablen ist.

Definition

- Sei \mathcal{H} die Familie aller Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 1$, wenn x außerhalb einer beschränkten (i.a. von f abhängigen) Borel-Menge $B_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ liegt.
- Die Abbildung $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (6)$$

wird *erzeugendes Funktional* des Punktprozesses $\{S_i\}$ genannt.

Beachte

- Das Produkt in (6) hat mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Faktoren, die von 1 verschieden sind, denn es gilt

$$\mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S_n) \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{n: S_n \in B_f} f(S_n) \right).$$

- Wenn die Funktion $f \in \mathcal{H}$ in (6) gegeben ist durch

$$f(x) = 1 + (z - 1) \mathbf{1}_B(x), \quad 0 \leq z \leq 1, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (7)$$

dann ergibt sich als Spezialfall die erzeugende Funktion $\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} z^{N_B}$ der Zufallsvariablen N_B .

Außerdem gilt der folgende *Eindeutigkeitssatz* für erzeugende Funktionale.

Theorem 3.2 *Die Verteilung der Punktprozesses $\{S_n\}$ ist eindeutig durch das erzeugende Funktional \mathbf{G} von $\{S_n\}$ bestimmt.*

Beweis

- In Verallgemeinerung von (7) betrachten wir die folgende Funktion $f \in \mathcal{H}$ mit

$$f(x) = \prod_{i=1}^k \left(1 + (z_i - 1) \mathbf{1}_{B_i}(x) \right),$$

wobei $k \geq 1$, $0 \leq z_1, \dots, z_k \leq 1$ und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ beliebige (beschränkte) Borel-Mengen sind.

- Dann kann man sich leicht überlegen, dass $\mathbf{G}(f)$ die erzeugende Funktion

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left(z_1^{N_{B_1}} \dots z_k^{N_{B_k}} \right) \quad (8)$$

des Zufallsvektors $(N_{B_1}, \dots, N_{B_k})$ ist.

- Aus (8) folgt wegen des Eindeutigkeitssatzes für erzeugende Funktionen (vgl. Korollar WR-5.5), dass die Verteilung von $(N_{B_1}, \dots, N_{B_k})$ eindeutig durch das erzeugende Funktional \mathbf{G} von $\{S_n\}$ bestimmt ist.
- Hieraus und aus Theorem 2.1 ergibt sich die Behauptung. □

Für das erzeugende Funktional von Poisson-Prozessen lässt sich die folgende einfache Formel herleiten.

Theorem 3.3 Sei $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ . Dann gilt

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (9)$$

Beweis

- Die Gültigkeit von (9) lässt sich mit algebraischer Induktion zeigen, wobei wir zunächst zeigen, dass (9) für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen gilt.
- Für $k \geq 1$, $0 \leq z_1, \dots, z_k \leq 1$ und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ sei

$$f(x) = 1 - \sum_{i=1}^k (1 - z_i) \mathbf{1}_{B_i}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (10)$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass die beschränkten Borel-Mengen $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ paarweise disjunkt sind.

- Dann sind die Zufallsvariablen N_{B_1}, \dots, N_{B_k} mit $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$ unabhängig, und es gilt somit für die in (10) gegebene Funktion $f \in \mathcal{H}$, dass

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^k z_i^{N_{B_i}}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{E} z_i^{N_{B_i}}. \quad (11)$$

- Weil die erzeugende Funktion $\mathbb{E} z_i^{N_{B_i}}$ der poissonverteilten Zufallsvariablen N_{B_i} gegeben ist durch

$$\mathbb{E} z_i^{N_{B_i}} = \exp(\mu(B_i)(z_i - 1)) \quad \forall z_i \in (0, 1),$$

ergibt sich aus (10) und (11), dass

$$\mathbf{G}(f) = \prod_{i=1}^k \exp(\mu(B_i)(z_i - 1)) = \exp\left(\sum_{i=1}^k (\mu(B_i)(z_i - 1))\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right). \quad (12)$$

- Damit ist (9) für Linearkombinationen von Indikatorfunktionen bewiesen.
- Für beliebige $f \in \mathcal{H}$ ergibt sich (9) nun aus der Tatsache, dass sich jede Funktion $f \in \mathcal{H}$ durch eine Folge $\{f_n\}$ von Funktionen der Gestalt (10) approximieren lässt, so dass

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

und

$$f_n(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B, n \geq 1,$$

wobei $B \in \mathcal{Q}^d$ ein beschränkter Quader ist, der nicht von n abhängt.

- Aus (6) und (12) ergibt sich dann mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(x) - 1) \mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - 1) \mu(dx)\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \mu(dx)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 2.8 und 3.3 ergibt sich die folgenden *Invarianzeigenschaft* von Poisson-Prozessen bezüglich unabhängiger Verschiebung der Punkte, vgl. Abbildung 10.

Korollar 3.1

- Sei $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ , und sei $U_1, U_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren mit der Verteilung P_U , die von $\{S_n\}$ unabhängig sind.
- Dann ist $\{S_n + U_n\}$ ein Poisson-Prozess, dessen Intensitätsmaß μ' gegeben ist durch

$$\mu'(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P_U(B - x) \mu(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (13)$$

- Wenn $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ ist, dann ist auch $\{S_n + U_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ .

Beweis

- Aus Theorem 2.8 folgt, dass $\{(S_n, U_n)\}$ ein Poisson-Prozess im \mathbb{R}^{2d} mit Intensitätsmaß $\mu \times P_U$ ist.
- Für $f \in \mathcal{H}$ und $f' : \mathbb{R}^{2d} \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$f'(x, u) = f(x + u)$$

ergibt sich somit aus Theorem 3.3, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S_n + U_n) \right) &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} (f(x + u) - 1) \mu \times P_U(d(x, u)) \right) \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x + u) - 1) \mu(dx) P_U(du) \right) \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x + u) - 1) P_U(du) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(u) - 1) P_U(du - x) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(u) - 1) \mu'(dx) \right), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch algebraische Induktion bezüglich $f - 1$ ergibt.

- Hieraus folgt (durch die erneute Anwendung von Theorem 3.3), dass das erzeugende Funktional des Punktprozesses $\{S_n + U_n\}$ mit dem erzeugenden Funktional eines Poisson-Prozess übereinstimmt, dessen Intensitätsmaß durch (13) gegeben ist.
- Die erste Teilaussage von Korollar 3.1 ergibt sich nun aus dem Eindeutigkeitssatz für erzeugende Funktionale (vgl. Theorem 3.2).
- Wenn $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ ist, d.h., $\mu(dx) = \lambda dx$, dann ergibt sich aus (13), dass für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \mu'(B) &= \int_{\mathbb{R}^d} P_U(B - x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B-x}(y) P_U(dy) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x + y) \mu(dx) P_U(dy) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x + y) dx P_U(dy) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) dx P_U(dy) = \lambda \nu_d(B). \quad \square \end{aligned}$$

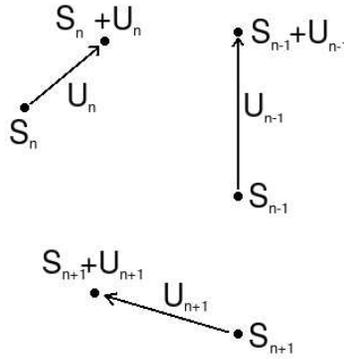


Abbildung 10: Unabhängige Verschiebung der Punkte

3.1.3 Laplace–Funktional

Analog zum Begriff des erzeugenden Funktional für Punktprozesse bzw. zufällige Zählmaße lässt sich das Laplace–Funktional für beliebige (nicht notwendig ganzzahlige) zufällige Maße einführen.

Definition

- Sei \mathbb{M} die Familie aller lokal endlichen Maße $\eta : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, d.h., es gilt $\eta(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n)$ für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Außerdem sei \mathcal{M} die kleinste σ –Algebra von Teilmengen von \mathbb{M} , so dass $\eta \mapsto \eta(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ –messbare Abbildung ist.
- Ein *zufälliges Maß* $\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{M}$ ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in dem messbaren Raum $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$, d.h., Λ ist ein (mengen–indizierter) stochastischer Prozess $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ über (Ω, \mathcal{F}, P) , so dass $\{\Lambda_B(\omega), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ für jedes $\omega \in \Omega$ ein lokal endliches Maß aus \mathbb{M} ist.

Definition

- Sei $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein beliebiges zufälliges Maß. Außerdem sei \mathcal{H}' die Familie aller beschränkten Borel–messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) = 0$, wenn x außerhalb einer beschränkten (i.a. von f abhängigen) Borel–Menge $B_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ liegt.
- Die Abbildung $\mathbf{L} : \mathcal{H}' \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\mathbf{L}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Lambda_{dx}\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}' \quad (14)$$

wird *Laplace–Funktional* des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$ genannt.

Beachte

- Ähnlich wie für zufällige Zählmaße kann auch für zufällige Maße der Begriff der endlich–dimensionalen Wahrscheinlichkeiten eingeführt und eine (den Theoremen 2.1 und 2.2 entsprechende) Existenz– und Eindeutigkeitsaussage bewiesen werden; vgl. O. Kallenberg (1986), *Random Measures*, Academic Press, London, Kapitel 3 und 5.
- Hieraus ergibt sich insbesondere,
 - dass zwischen der Verteilung des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$ und seinem Laplace–Funktional \mathbf{L} ein eindeutiger Zusammenhang besteht,

– denn für jedes k -Tupel von paarweise disjunkten Borel-Mengen $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ist die Laplace–Stieltjes–Transformierte des Zufallsvektors $(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_k})$ gegeben durch

$$\mathbb{E} \exp\left(-\sum_{i=1}^k s_i \Lambda_{B_i}\right) = \mathbf{L}(f) \quad \forall s_1, \dots, s_k > 0,$$

wobei

$$f(x) = \sum_{i=1}^k s_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Für Punktprozesse (d.h. für zufällige Zählmaße) kann sowohl das erzeugende Funktional als auch das Laplace-Funktional betrachtet werden. Dabei sind diese beiden Charakteristiken wie folgt miteinander verknüpft.

Theorem 3.4 Sei $\{S_n\}$ ein beliebiger Punktprozess mit dem erzeugenden Funktional \mathbf{G} und dem Laplace-Funktional \mathbf{L} . Dann gilt

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{G}(\exp(-f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}'. \quad (15)$$

Beweis

- Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (6) und (14) von \mathbf{G} bzw. \mathbf{L} .
- Denn für jedes $f \in \mathcal{H}'$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(f) &\stackrel{(14)}{=} \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) N_{dx}\right) = \mathbb{E} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \exp(-f(S_n))\right) \stackrel{(6)}{=} \mathbf{G}(\exp(-f)). \end{aligned} \quad \square$$

3.1.4 Stationarität

Unter der Stationarität eines Punktprozesses versteht man die folgende Invarianzeigenschaft seiner endlich-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten bezüglich beliebiger Verschiebungen des Nullpunktes.

Definition

Für beliebige $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $B+x = \{y+x : y \in B\}$ die Verschiebung der Borel-Menge B um den Vektor x . Ein Punktprozess $\{S_n\}$ in \mathbb{R}^d bzw. das zugehörige Zählmaß $\{N_B\}$ heißt *stationär*, wenn

$$(N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) \stackrel{D}{=} (N_{B_1+x}, \dots, N_{B_n+x}) \quad (16)$$

für beliebige $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Beachte

- Man kann zeigen, dass stationäre Punktprozesse mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder aus unendlich vielen Punkten bestehen oder überhaupt keinen Punkt besitzen, d.h., es gilt dann

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d} = 0\}) = 1. \quad (17)$$

- Dabei kann die Aussage (17) sogar noch wie folgt verschärft werden, indem wir für jeden Vektor $u \in \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ der Einheitssphäre im \mathbb{R}^d den Halbraum

$$H_u^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : [x, u] \geq 0\}$$

betrachten, wobei $[x, u] = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ das Skalarprodukt der Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $u = (u_1, \dots, u_n)$ bezeichnet; $|x| = \sqrt{[x, x]}$.

Theorem 3.5 Sei $\{N_B\}$ ein stationäres zufälliges Zählmaß. Dann gilt

$$P(\{N_{H_u^+} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d} = 0\}) = 1 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (18)$$

Beweis

- Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ und $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ sei $H_{u,s,t} = \{x \in \mathbb{R}^d : s \leq [x, u] \leq t\}$.
- Dann kann man sich leicht überlegen, dass

$$H_{u,t,t+h} = H_{u,0,h} + tu \quad \forall t \in \mathbb{R}, h > 0.$$

- Hieraus und aus der Stationarität von $\{N_B\}$ ergibt sich, dass

$$P(N_{H_{u,t,t+h}} > 0) = P(N_{H_{u,0,h}} > 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, h > 0.$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} P(N_{H_{u,t,t+h}} > 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \mathbf{1}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &\leq \mathbb{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0) \\ &\leq \mathbb{E} \mathbf{1}(N_{H_{u,n,n+h}} > 0 \text{ für unendlich viele } n \geq 1) \\ &\leq P(N_{H_u^+} = \infty), \end{aligned}$$

wobei sich die erste Ungleichung aus dem Lemma von Fatou ergibt.

- Für $h \rightarrow \infty$ ergibt sich hieraus, dass

$$P(N_{\{x \in \mathbb{R}^d : t \leq [x, u]\}} > 0) \leq P(N_{H_u^+} = \infty),$$

und somit für $t \rightarrow -\infty$, dass

$$P(N_{\mathbb{R}^d} > 0) \leq P(N_{H_u^+} = \infty). \quad (19)$$

- Aus (19) folgt, dass

$$\begin{aligned} P(N_{\mathbb{R}^d} > 0, N_{H_u^+} < \infty) &= P(\{N_{\mathbb{R}^d} > 0\} \setminus \{N_{H_u^+} = \infty\}) \\ &= P(N_{\mathbb{R}^d} > 0) - P(N_{H_u^+} = \infty) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

- Somit gilt $P(N_{\mathbb{R}^d} > 0, N_{H_u^+} < \infty) = 0$ bzw. äquivalent hierzu

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d} = 0\} \cup \{N_{H_u^+} = \infty\}) = 1. \quad \square$$

Theorem 3.6 Sei $\{N_B\}$ ein stationäres zufälliges Zählmaß. Dann gibt es eine Konstante $\lambda < \infty$, so dass

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (20)$$

Beweis

- Aus der Stationarität von $\{N_B\}$ ergibt sich, dass

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B = \mathbb{E} N_{B+x} = \mu(B+x) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d,$$

d.h., das Intensitätsmaß μ ist translationsinvariant.

- Weil außerdem vorausgesetzt wird, dass μ lokal endlich ist, ergibt sich aus dem Lemma von Haar,
 - dass μ ein Vielfaches des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes ν_d sein muss,
 - d.h., es gibt eine Konstante $\lambda \geq 0$, so dass

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Insbesondere gilt also, dass $\mu([0, 1]^d) = \lambda$ und somit dass $\lambda < \infty$. □

Korollar 3.2 Für jedes stationäre zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ mit $\lambda < \infty$ gilt

$$P(N_{\{x\}} > 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (21)$$

Beweis Aus Theorem 3.6 folgt, dass $\mu(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Hieraus ergibt sich, dass

$$P(N_{\{x\}} = 0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \square$$

Beachte

- Aus (20) ergibt sich, dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (22)$$

für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität λ ist.

- Wenn W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ ist und wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n}}{\nu_d^2(W_n)} = 0, \quad (23)$$

dann ergibt sich aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18), dass der erwartungstreue Schätzer $\hat{\lambda}_{W_n}$ schwach konsistent ist.

- Im allgemeinen muss $\hat{\lambda}_{W_n}$ jedoch weder asymptotisch normalverteilt noch stark konsistent sein. Dabei gibt es sogar Beispiele (vgl. Abschnitt 3.2.2), für die

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{W_n} \neq \lambda\right) = 1.$$

3.2 Cox-Prozesse

3.2.1 Simulationsalgorithmus und grundlegende Eigenschaften

Außer den in Abschnitt 2 betrachteten Poissonschen Zählmaßen gibt es noch weitere Klassen von zufälligen Punktprozessen.

Ein zufälliges Zählmaß $\{N_B\}$ wird Cox-Prozess genannt, wenn sich seine Verteilung als eine Mischung der Verteilungen von (nicht notwendig homogenen) Poisson-Prozessen darstellen lässt. Deshalb wird für diese Klasse von Punktprozessen auch der Begriff *doppelt-stochastischer Poisson-Prozess* verwendet.

Definition

- Sei $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein beliebiges zufälliges Maß, das mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal–endlich ist.
- Das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ wird *Cox-Prozess* mit dem zufälligen Intensitätsmaß Λ genannt, wenn

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \frac{\Lambda_{B_i}^{k_i}}{k_i!} \exp(-\Lambda_{B_i})\right) \quad (24)$$

für beliebige $n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0$ und für paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

Beachte

- Aus den Theoremen 2.1 und 2.2 ergibt sich, dass die Verteilung des Cox–Prozesses $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ durch die in (24) gegebenen „endlich–dimensionalen“ Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist.
 - Dabei lässt sich das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit den in (24) gegebenen Wahrscheinlichkeiten als ein mengen–indizierter stochastischer Prozess über dem folgenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definieren mit

$$\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{M}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$$

und $N_B(\omega) = \varphi(B)$ für beliebige $\omega = (\varphi, \eta) \in \Omega$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{N} \otimes \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ wird durch die Verteilung $P_\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ des zufälligen Intensitätsmaßes $\{\Lambda_B\}$ induziert, wobei

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \int_{\mathbb{M}} \prod_{i=1}^n \frac{\eta^{k_i}(B_i)}{k_i!} \exp(-\eta(B_i)) P_\Lambda(d\eta) \quad (25)$$

für beliebige $n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0$ und für paarweise disjunkte $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

- Eine zu (24) bzw. (25) äquivalente Schreibweise ist die folgende (kontinuierliche Version) der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}\right) = \int_{\mathbb{M}} P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\} \mid \Lambda = \eta\right) P(\Lambda \in d\eta), \quad (26)$$

wobei

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\} \mid \Lambda = \eta\right) = \prod_{i=1}^n \frac{\eta^{k_i}(B_i)}{k_i!} \exp(-\eta(B_i)).$$

- Die Verteilung des Cox–Prozesses $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ lässt sich somit als eine Mischung von Verteilungen (nicht notwendig homogener) Poisson–Prozesse darstellen.
- Hieraus ergibt sich ein Algorithmus zur Simulation von Cox–Prozessen in einer vorgegebenen Borel–Menge $C \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$:
 1. Generiere eine Realisierung $\eta(\cdot \cap C)$ des zufälligen Maßes Λ in C . (Beispiele, für die das auf einfache Weise möglich ist, werden in Abschnitt 3.2.3 diskutiert.)
 2. Generiere eine Realisierung eines (i.a. inhomogenen) Poisson–Prozesses mit dem Intensitätsmaß $\eta(\cdot \cap C)$. (Algorithmen hierfür wurden in den Abschnitten 2.1.4 bzw. 2.2.1 bzw. 2.3.1 betrachtet.)

Wir leiten nun die folgenden grundlegenden Eigenschaften von Cox–Prozessen her.

Theorem 3.7 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Cox–Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.

- Dann besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Verteilungen von $\{N_B\}$ und $\{\Lambda_B\}$.
- Außerdem gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbf{L}(1 - f) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (27)$$

wobei \mathbf{G} das erzeugende Funktional des Cox-Prozesses $\{N_B\}$ und \mathbf{L} das Laplace-Funktional von $\{\Lambda_B\}$ ist.

- D.h., es gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda_{dx}\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (28)$$

Beweis

- Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (27).
 - Aus (25) ergibt sich mit Hilfe von Theorem 3.3, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(25)}{=} \int_{\mathbb{M}} \mathbf{G}_\eta(f) P(\Lambda \in d\eta) \\ &\stackrel{(9)}{=} \int_{\mathbb{M}} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \eta(dx)\right) P(\Lambda \in d\eta) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \Lambda_{dx}\right) \\ &= \mathbf{L}(1 - f), \end{aligned}$$

wobei \mathbf{G}_η das erzeugende Funktional eines Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß η ist.

- Der eindeutige Zusammenhang zwischen den Verteilungen von $\{N_B\}$ und $\{\Lambda_B\}$ lässt sich wie folgt zeigen.
 - Das Laplace-Funktional \mathbf{L} des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$ ist eindeutig bestimmt durch seine Werte $\mathbf{L}(f)$ für Funktionen $f \in \mathcal{H}'$ mit $0 \leq f(x) \leq 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$,
 - und es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Laplace-Funktional \mathbf{L} und der Verteilung von $\{\Lambda_B\}$, vgl. Abschnitt 3.1.2.
 - Außerdem ergibt sich aus (27), dass der Zusammenhang zwischen \mathbf{L} und \mathbf{G} eindeutig ist.
 - Schließlich ergibt sich aus Theorem 3.2, dass die Verteilung des Cox-Prozesses $\{N_B\}$ eindeutig durch sein erzeugendes Funktional \mathbf{G} bestimmt wird. \square

Theorem 3.8

- Das Intensitätsmaß μ eines Cox-Prozesses $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\mu(B) = \mathbb{E} \Lambda_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (29)$$

- Der Cox-Prozess $\{N_B\}$ ist genau dann stationär, wenn sein zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ stationär ist, d.h., wenn

$$(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_n}) \stackrel{D}{=} (\Lambda_{B_1+x}, \dots, \Lambda_{B_n+x}) \quad (30)$$

für beliebige $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

- Die Intensität λ eines stationären Cox-Prozesses ist gegeben durch

$$\lambda = \mathbb{E} \Lambda_{[0,1]^d}. \quad (31)$$

Beweis

- Die Gültigkeit von (29) ergibt sich unmittelbar aus der Mischungsdarstellung (25) von Cox-Prozessen, denn es gilt

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B = \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E}(N_B \mid \Lambda = \eta) P(\Lambda \in d\eta) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B) P(\Lambda \in d\eta) = \mathbb{E} \Lambda(B).$$

- Wenn $\{\Lambda_B\}$ stationär ist, dann ergibt sich die Stationarität von $\{N_B\}$ unmittelbar aus der Definitionsgleichung (24) von Cox-Prozessen.
- Außerdem ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ das (um x verschobene) zufällige Maß $\{\Lambda_{B+x}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ das zufällige Intensitätsmaß des (entsprechend verschobenen) Cox-Prozesses $\{N_{B+x}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.
- Wenn umgekehrt $\{N_B\}$ stationär ist, dann ergibt sich somit die Stationarität von $\{\Lambda_B\}$ aus dem eindeutigen Zusammenhang zwischen Cox-Prozessen und ihren zufälligen Intensitätsmaßen, der in Theorem 3.7 gezeigt wurde.
- Die Darstellungsformel (31) für die Intensität λ von stationären Cox-Prozessen ergibt sich aus (29) für $B = [0, 1]^d$. \square

3.2.2 Absolutstetiges zufälliges Intensitätsmaß; Schätzung der Intensität

Ein wichtiger Spezialfall eines Cox-Prozesses liegt dann vor,

- wenn die Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes $\{\Lambda_B\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, d.h.,
- wenn es ein zufälliges Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ gibt, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (32)$$

- Das zufällige Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ wird dann das *Intensitätsfeld* von $\{N_B\}$ genannt.

Theorem 3.9 *Das in (32) gegebene zufällige Maß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist stationär, wenn das zufällige Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ stationär ist. Wenn zusätzlich $\mathbb{E} \lambda_o < \infty$, dann gilt*

$$\mathbb{E} \Lambda_B = \nu_d(B) \mathbb{E} \lambda_o < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (33)$$

Beweis

- Wenn $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ stationär ist, d.h., wenn

$$\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{D}{=} \{\lambda_{x+y}, x \in \mathbb{R}^d\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad (34)$$

dann ergibt sich aus (32), dass

$$(\Lambda_{B_1}, \dots, \Lambda_{B_n}) \stackrel{D}{=} (\Lambda_{B_1+y}, \dots, \Lambda_{B_n+y}) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

- Außerdem ergibt sich aus (32) und (34), dass

$$\mathbb{E} \Lambda_B \stackrel{(32)}{=} \mathbb{E} \int_B \lambda_x dx = \int_B \mathbb{E} \lambda_x dx \stackrel{(34)}{=} \int_B \mathbb{E} \lambda_o dx = \mathbb{E} \lambda_o \int_B dx = \mathbb{E} \lambda_o \nu_d(B). \quad \square$$

Beachte

- Wenn umgekehrt das zufällige Maß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär ist und wenn

$$(\lambda_{x_1}, \dots, \lambda_{x_n}) \stackrel{D}{=} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_B(x_1, r)}{\kappa_d r^d}, \dots, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Lambda_B(x_n, r)}{\kappa_d r^d} \right) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, \quad (35)$$

dann ist das auch das zufällige Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ stationär.

- Aus den Theoremen 3.8 und 3.9 ergibt sich, dass ein Cox-Prozess $\{N_B\}$ stationär ist, wenn sein zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ durch (32) gegeben ist und wenn das zugrundeliegende zufällige Feld $\{\lambda_x\}$ stationär ist.

- Für die Intensität λ des stationären Cox-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich dann aus (31) und (33), dass

$$\lambda = \mathbb{E} \lambda_o. \quad (36)$$

- Wenn das stationäre Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ von $\{N_B\}$ in dem Fenster $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ beobachtbar ist, dann ergibt sich aus (36), dass durch

$$\tilde{\lambda}_W = \frac{1}{\nu_d(W)} \int_W \lambda_x \, dx \quad \text{mit } 0 < \nu_d(W) < \infty \quad (37)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität λ von $\{N_B\}$ gegeben ist.

3.2.3 Gemischte Poisson-Prozesse, Neyman-Scott-Prozesse, modulierte Poisson-Prozesse

In diesem Abschnitt führen wir einige Beispiele von Cox-Prozessen mit absolutstetigem zufälligen Intensitätsmaß ein.

1. *Gemischte Poisson-Prozesse*

Eine elementare Klasse von Cox-Prozessen mit absolutstetigen Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes $\{\Lambda_B\}$ sind die *gemischten Poisson-Prozesse*, deren Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch $\lambda_x = Z$ gegeben ist, wobei $Z : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine beliebige nichtnegative Zufallsvariable mit $\mathbb{E} Z < \infty$ ist.

- Aus den Theoremen 3.8 bzw. 3.9 ergibt sich, dass jeder gemischte Poisson-Prozess ein stationärer Punktprozess ist. Seine Intensität λ ist gegeben durch

$$\lambda = \mathbb{E} Z. \quad (38)$$

- Außerdem gilt in diesem Fall

$$\text{Var } N_B = \nu_d(B) \mathbb{E} Z + \nu_d^2(B) \text{Var } Z, \quad (39)$$

- denn aus der Definitionsgleichung (24) von Cox-Prozessen ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_B &= \mathbb{E} N_B^2 - (\mathbb{E} N_B)^2 \\ &= \int_0^\infty (z \nu_d(B) + (z \nu_d(B))^2) P(Z \in dz) - \left(\int_0^\infty z \nu_d(B) P(Z \in dz) \right)^2 \\ &= \nu_d(B) \mathbb{E} Z + \nu_d^2(B) \text{Var } Z. \end{aligned}$$

- Wenn $\text{Var } Z > 0$, d.h., die Zufallsvariable Z nimmt nicht nur einen Wert an,
 - dann folgt aus (39), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n}}{\nu_d^2(W_n)} = \text{Var } Z > 0, \quad (40)$$

- wenn W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty. \quad (41)$$

- Es kann dann also nicht so wie in (23) auf die schwache Konsistenz des Intensitätsschätzers

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)}$$

geschlossen werden.

- Wenn $\text{Var } Z > 0$, dann kann man sich darüber hinaus leicht überlegen, dass $\widehat{\lambda}_W$ im allgemeinen weder asymptotisch normalverteilt noch konsistent ist.

- Denn aus Theorem 2.9 ergibt sich, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} = Z,$$

- wenn $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ eine monotone Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ist, für die (41) gilt.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass Z absolutstetig ist, dann gilt also sogar

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)} \neq \lambda\right) = 1.$$

2. Neyman–Scott–Prozesse

Wir betrachten nun eine Klasse von Cox–Prozessen, die auch als Poissonsche Cluster–Prozesse aufgefasst werden können; vgl. Abschnitt 3.3.

- Sei $\{S_n\}$ ein Poisson–Prozess mit der (lokal integrierbaren) Intensitätsfunktion $\{\lambda_0(x), x \in \mathbb{R}^d\}$, und sei $Z = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$ die (zufällige) Anzahl der Atome von $\{S_n\}$ in \mathbb{R}^d .
- Außerdem sei $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Poissonschen Zählmaßen, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und die die integrierbare Intensitätsfunktion $\{\lambda^{(1)}(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ besitzen, d.h., es gelte

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx < \infty. \quad (42)$$

- In einem allgemeineren Zusammenhang werden wir später zeigen (vgl. Theorem 3.14), dass das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, wobei

$$N_B = \sum_{n=1}^Z N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (43)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal endlich ist, wenn die folgende Integrierbarkeitsbedingung erfüllt ist:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_B \lambda^{(1)}(y-x) dy \lambda_0(x) dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (44)$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass das in (43) eingeführte zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ die folgenden Eigenschaften hat.

Theorem 3.10

- Wenn (44) gilt, dann ist $\{N_B\}$ ein Cox–Prozess, dessen Intensitätsfeld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ gegeben ist durch

$$\lambda_x = \sum_{n=1}^Z \lambda^{(1)}(x - S_n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (45)$$

- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass der Poisson-Prozess $\{S_n\}$ stationär ist, d.h., wenn es eine Konstante $\lambda_0 > 0$ gibt, so dass

$$\lambda(x) = \lambda_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

- dann ist auch der Cox-Prozess $\{N_B\}$ stationär,
- und die Intensität $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$ von $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx. \quad (46)$$

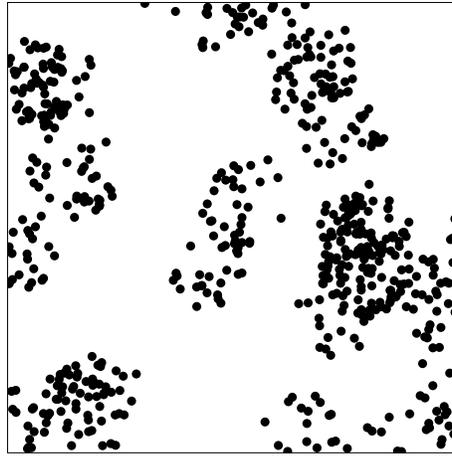


Abbildung 11: Matérn-Cluster-Prozess; $\lambda_0 = 0.002$, $\lambda^{(1)} = 0.1$, $R = 10$

Beweis

- Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus den allgemeinen Eigenschaften von Poissonschen Cluster-Prozessen, die wir in Abschnitt 3.3 herleiten werden.
 - Insbesondere zeigen wir in Abschnitt 3.3.3, dass das erzeugende Funktional \mathbf{G} des in (43) eingeführten Punktprozesses $\{N_B\}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1-f(x)) \Lambda_{dx}\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (47)$$

- wobei $\{\Lambda_B\}$ ein zufälliges Maß ist mit

$$\Lambda_B = \int_B \sum_{n=1}^Z \lambda^{(1)}(x - S_n) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (48)$$

- Mit Hilfe von Theorem 3.7 ergibt sich hieraus, dass $\{N_B\}$ ein Cox-Prozess ist, dessen zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ durch (48) gegeben ist.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass $\{S_n\}$ ein stationärer Poisson-Prozess mit der Intensität λ_0 ist,
 - dann ergibt sich aus (48), dass das zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ stationär ist.
 - Wegen Theorem 3.8 ist somit auch der Cox-Prozess $\{N_B\}$ stationär.
 - Außerdem ergibt sich aus (45), dass

$$\mathbb{E} \lambda_0 = \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(-S_n) \stackrel{\text{Theorem 3.1}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(-x) dx = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx,$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

– Hieraus und aus (31) bzw. (33) ergibt sich der zweite Teil der Behauptung. \square

Beachte

- Der in (43) eingeführte Cox-Prozess $\{N_B\}$ wird in der Literatur *Neyman-Scott-Prozess* genannt.
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lambda^{(1)}(x) = \begin{cases} \lambda^{(1)}, & \text{falls } x \in B(o, R), \\ 0, & \text{falls } x \notin B(o, R) \end{cases} \quad (49)$$

für gewisse Konstanten $\lambda^{(1)}$, $R > 0$, dann sagt man, dass $\{N_B\}$ ein *Matérn-Cluster-Prozess* ist, vgl. die Abbildungen 11 und 12.

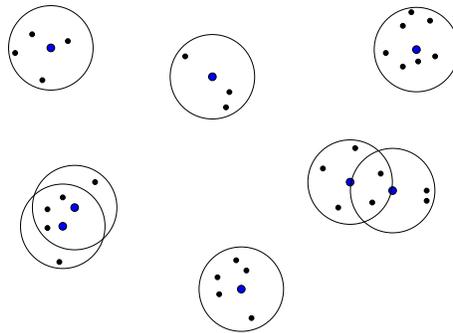


Abbildung 12: Simulation von Matérn-Cluster-Prozessen

3. Modulierte Poisson-Prozesse

Eine weitere Klasse von Cox-Prozessen ergibt sich, wenn das Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch ein so genanntes Keim-Korn-Modell induziert wird.

- Hierfür sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines homogenen Poisson-Prozesses mit der Intensität $\lambda_0 \in (0, \infty)$, wobei S_n als Keim und die Kugel $B(S_n, r)$ mit Mittelpunkt S_n und Radius $r > 0$ als das zugehörige Korn aufgefasst werden.
- Sei \mathbb{F} die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen in \mathbb{R}^d . Für eine Zahl $r > 0$ betrachten wir die (zufällige) Menge $\Xi : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$, die *Keim-Korn-Modell* genannt wird und die gegeben ist durch

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r). \quad (50)$$

- *Beachte:* Man kann sich leicht überlegen, dass die Vereinigung auf der rechten Seite von (50) mit Wahrscheinlichkeit 1 eine abgeschlossene Menge ist.
- Das Intensitätsfeld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ ist dann gegeben durch den Ansatz

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi, \end{cases} \quad (51)$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ beliebige Zahlen mit $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$ sind.

- Ein Cox-Prozess $\{N_B\}$, dessen Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch (51) gegeben ist, wird *modulierter Poisson-Prozess* genannt, vgl. Abbildung 13.

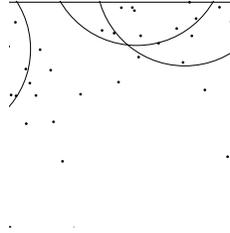


Abbildung 13: Modulierter Poisson-Prozess

- Im Spezialfall, wenn $\lambda_1 = 0$ (und somit $\lambda_2 > 0$), spricht man von einem *Swiss-Cheese-Modell*.
- Wenn umgekehrt $\lambda_2 = 0$ (und $\lambda_1 > 0$), dann sagt man, dass der Cox-Prozess $\{N_B\}$ ein *Inner-City-Modell* ist.

Theorem 3.11 Sei $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$ das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel. Für die Intensität λ eines modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$, dessen Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch (51) gegeben ist, gilt dann

$$\lambda = \lambda_1(1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \quad (52)$$

Beweis

- Weil das in (51) eingeführte Intensitätsfeld stationär ist, ergibt sich aus Theorem 3.8, dass der zugehörige Cox-Prozess $\{N_B\}$ stationär ist.
- Aus der allgemeinen Darstellungsformel (33), die in Theorem 3.9 für das Intensitätsmaß von stationären Cox-Prozessen hergeleitet wurde, ergibt sich unter Berücksichtigung von (51), dass

$$\begin{aligned} \lambda &= \mathbb{E} \lambda_o = \lambda_1 P(o \in \Xi) + \lambda_2 P(o \notin \Xi) \\ &= \lambda_1 P(\#\{n : |S_n| \leq r\} > 0) + \lambda_2 P(\#\{n : |S_n| \leq r\} = 0) \\ &= \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \end{aligned} \quad \square$$

3.2.4 Varianz und asymptotische Normalverteilung des Intensitätsschätzers

1. Neyman-Scott-Prozesse

- Sei $\{N_B\}$ ein Neyman-Scott-Prozess, der durch (43) gegeben ist und den Integrierbarkeitsbedingungen (42) und (44) genügt.
- Wenn $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus Theorem 3.10, dass $\{N_B\}$ ein stationärer Cox-Prozess ist und dass

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (53)$$

für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität λ von $\{N_B\}$ ist.

Die folgende Darstellungsformel für die Varianz von $\widehat{\lambda}_W$ ist nützlich.

Lemma 3.1 *Sei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ_0 . Dann gilt für jede Borel-Menge $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$*

$$\text{Var } \widehat{\lambda}_W = \frac{\lambda_0}{\nu_d(W)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1)))}{\nu_d(W)} \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) \, dx_1 \, dx_2 \right). \quad (54)$$

Beweis

- Mit der Kurzschreibweise $P(d\{s_n\}) = P(\{S_n\} = d\{s_n\})$ ergibt sich aus der Definitionsgleichung (43) von N_W , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} N_{W-s_n}^{(n)} \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(N_{W-s_n}^{(n)} - \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx + \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right) \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_n}^{(n)} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right)^2 \right) P(d\{s_n\}), \end{aligned}$$

- wobei in der letzten Gleichheit genutzt wurde, dass $N_{W-s_1}^{(1)}, N_{W-s_2}^{(2)}, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen sind mit

$$N_{W-s_n}^{(n)} \sim \text{Poi} \left(\int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right)$$

- und dass somit insbesondere

$$\mathbb{E} N_{W-s_n}^{(n)} = \text{Var } N_{W-s_n}^{(n)} = \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx.$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right)^2 \right) P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right) P(d\{s_n\}) + \int \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &\quad + \int \sum_{n \neq m} \left(\int_{W-s_n} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right) \left(\int_{W-s_m} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right) P(d\{s_n\}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) \, dx \, dy + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) \, dx \right)^2 \, dy \\ &\quad + \left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) \, dx \, dy \right)^2 \\ &= \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) \, dx \\ &\quad + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1))) \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &\quad + \left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) \, dx \, dy \right)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

- Weil

$$\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W-y} \lambda^{(1)}(x) dx dy = \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \stackrel{(46)}{=} \mathbb{E} N_W,$$

ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_W &= \lambda_0 \nu_d(W) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \\ &+ \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - (x_2 - x_1))) \lambda^{(1)}(x_1) \lambda^{(1)}(x_2) dx_1 dx_2. \quad \square \end{aligned}$$

Außerdem hat der Schätzer $\widehat{\lambda}_W$ die folgenden asymptotischen (Güte-) Eigenschaften.

Theorem 3.12

1. Sei W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist der erwartungstreue Schätzer $\widehat{\lambda}_{W_n}$ schwach konsistent, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (55)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (56)$$

dann existiert der Grenzwert $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n}$, wobei

$$\sigma^2 = \lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right), \quad (57)$$

und der Schätzer $\widehat{\lambda}_{W_n}$ ist asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x), \quad (58)$$

wobei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Beweis

- Aus Formel (54) in Lemma 3.1 ergibt sich, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = 0$, wenn $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$.
– Hieraus und aus der Tschebyschew-Ungleichung (vgl. Theorem WR-4.18) ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n}}{\varepsilon^2} = 0,$$

– Damit ist die Gültigkeit von (55) bewiesen.

- Offenbar gilt

$$\frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$$

– Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz ergibt sich deshalb aus (54) und (56), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = \lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right).$$

– Damit ist (57) bewiesen.

- Um die Verteilungskonvergenz (58) zu beweisen, betrachten wir die entsprechenden charakteristischen Funktionen (ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.9) und zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left(i s \frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n}}{\sqrt{\nu_d(W_n)}} \right) = \exp\left(-\frac{s^2 \sigma^2}{2} \right) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (59)$$

wobei die asymptotische Varianz σ^2 in (57) gegeben ist.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der Erwartungswert

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} f(S'_n) \right),$$

der in der Definitionsgleichung (6) des erzeugenden Funktionals \mathbf{G} eines (beliebigen) Punktprozesses $\{S'_n\}$ betrachtet wurde, auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = 1 + (e^{is} - 1) \mathbb{1}_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (60)$$

wohldefiniert ist, wobei $s \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

- Dabei ist $\mathbf{G}(f)$ für die in (60) betrachtete Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen $N'_B = \#\{n : S'_n \in B\}$, d.h., es gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} e^{is N'_B}. \quad (61)$$

- Außerdem werden wir in Abschnitt 3.3.3 zeigen (vgl. auch (47) und (48)), dass

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_k) dx \right).$$

- Hieraus und aus (60) bzw. (61) folgt, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\exp(i s \sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n}) \right) \\ &= \mathbb{E} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_k) dx \right) \\ &= \mathbb{E} \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x - S_k) dx \right) \\ &= \exp\left(\lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x - y) dx \right) - 1 \right) dy \right), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional von Poisson-Prozessen ergibt.

- Somit ergibt sich durch Taylor-Reihenentwicklung der (mittleren) Exponentialfunktion des letzten Ausdruckes, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\exp(i s \sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n}) \right) \\ &= \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x - y) dx dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{W_n} (e^{is/\sqrt{\nu_d(W_n)}} - 1) \lambda^{(1)}(x - y) dx \right)^2 dy + o(1) \right). \end{aligned}$$

- Durch Taylor–Reihenentwicklung der beiden inneren Exponentialfunktionen ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\exp(is\sqrt{\nu_d(W_n)} \widehat{\lambda}_{W_n}) \right) \\ &= \exp \left(is\sqrt{\nu_d(W_n)} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{s^2}{2} \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) + o(1) \right). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (46) folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\exp(is\sqrt{\nu_d(W_n)} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda)) \right) = \exp \left(- \frac{s^2}{2} \lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{(1)}(x) dx \right)^2 \right) \right).$$

- Wegen (57) ist dies gleichbedeutend mit (59). \square

2. Modulierte Poisson–Prozesse

- Sei nun $\{N_B\}$ ein modulierter Poisson–Prozess, dessen Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch (51) gegeben ist.
- Dann ist klar, dass

$$\widehat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (62)$$

für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität λ von $\{N_B\}$ ist.

- Außerdem gilt die folgende Darstellungsformel für die Varianz von $\widehat{\lambda}_W$, die sich auf ähnliche Weise herleiten lässt, wie die Varianzformel (54) für Neyman–Scott–Prozesse in Lemma 3.1.

Lemma 3.2 *Sei $\{N_B\}$ ein modulierter Poisson–Prozess. Dann gilt für jede Borel–Menge $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$*

$$\text{Var } \widehat{\lambda}_W = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d^2(W)}. \quad (63)$$

Beweis

- Mit der Kurzschreibweise $P(d\xi) = P(\Xi = d\xi)$ ergibt sich ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } N_W &= \int_{\mathbb{F}} \left(\lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c) + (\lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c))^2 \right) P(d\xi) \\ & \quad - \left(\int_{\mathbb{F}} (\lambda_1 \nu_d(W \cap \xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \xi^c)) P(d\xi) \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\lambda_1 \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \Xi^c) \right) + \text{Var} \left(\lambda_1 \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W \cap \Xi^c) \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\lambda_1 - \lambda_2) \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) \right) + \text{Var} \left((\lambda_1 - \lambda_2) \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) \right) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi). \end{aligned}$$

- Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } \widehat{\lambda}_W &= \text{Var } \frac{N_W}{\nu_d(W)} \\ &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var } \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Beachte

- Für das in (50) eingeführte Keim–Korn–Modell Ξ ergibt sich aus der Stationarität des zugrunde liegenden Poisson–Prozesses $\{S_n\}$, dass

$$P(o \in \Xi) = P(x \in \Xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (64)$$

und

$$\mathbb{E} \nu_d(B \cap \Xi) = \mathbb{E} \nu_d((B + x) \cap \Xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (65)$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass der *Volumenanteil* $\mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi)$ mit der sogenannten „Einpunkt–Überdeckungswahrscheinlichkeit“ $p_o = P(o \in \Xi)$ von Ξ übereinstimmt.
- Außerdem sind die folgenden Eigenschaften des Keim–Korn–Modells Ξ nützlich.

Lemma 3.3

1. Es gilt

$$\mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) = P(o \in \Xi) = 1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d). \quad (66)$$

2. Für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ist durch

$$\widehat{p}_W = \frac{\nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} \quad (67)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $p_o = P(o \in \Xi)$ gegeben.

3. Sei W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (68)$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{p}_{W_n} = \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o,x} - p_o^2) dx, \quad (69)$$

wobei $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$.

Beweis

- Aus (64) und aus dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) &= \mathbb{E} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{1}_\Xi(x) dx \stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_{[0, 1]^d} \mathbb{E} \mathbb{1}_\Xi(x) dx \\ &= \int_{[0, 1]^d} P(x \in \Xi) dx \stackrel{(64)}{=} \int_{[0, 1]^d} P(o \in \Xi) dx = P(o \in \Xi). \end{aligned}$$

- Außerdem ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 3.11, dass

$$P(o \in \Xi) = P(\#\{n : |S_n| \leq r\} > 0) = 1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d).$$

- Damit ist (66) bewiesen.
- Aus der Invarianzeigenschaft (65) ergibt sich mit Hilfe des Lemmas von Haar, dass

$$\mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi) = \nu_d(W) \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) \quad \forall W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$$

und somit

$$\mathbb{E} \widehat{p}_W = \frac{\mathbb{E} \nu_d(W \cap \Xi)}{\nu_d(W)} = \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) \stackrel{(66)}{=} p_o.$$

- Um die Gültigkeit von (69) zu zeigen, überlegen wir uns zunächst, dass für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \nu_d^2(W) \text{Var} \widehat{p}_W &= \mathbb{E} \left((\nu_d(W \cap \Xi) - \nu_d(W) p_o)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_W (\mathbb{1}_\Xi(u) - p_o) du \int_W (\mathbb{1}_\Xi(v) - p_o) dv \right) \\ &= \int_W \int_W \mathbb{E} \left((\mathbb{1}_\Xi(u) - p_o)(\mathbb{1}_\Xi(v) - p_o) \right) du dv \\ &= \int_W \int_W \left(\mathbb{E} (\mathbb{1}_\Xi(u) \mathbb{1}_\Xi(v)) - p_o^2 \right) du dv \\ &= \int_W \int_W (p_{o, u-v} - p_o^2) du dv \\ &= \int_W \int_{W-v} (p_{o, x} - p_o^2) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_W \mathbb{1}_{W-v}(x) dv (p_{o, x} - p_o^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d(W \cap (W - x)) (p_{o, x} - p_o^2) dx. \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (68) ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \widehat{p}_{W_n} = \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o, x} - p_o^2) dx,$$

weil

$$\frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} (p_{o, x} - p_o^2) \leq p_o \mathbb{1}_{B(o, r)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

und weil somit die Funktion $x \mapsto p_o \mathbb{1}_{B(o, r)}(x)$ eine integrierbare Majorante ist.

- Damit ist (69) bewiesen. □

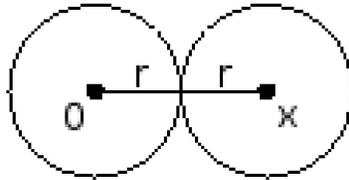


Abbildung 14: Bestimmung der Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeit $p_{o,x}$ für $|x| \geq 2r$

Beachte

- Die „Zweipunkt-Überdeckungswahrscheinlichkeit“ $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$ in (69) ist gegeben durch

$$p_{o,x} = \begin{cases} 2p_o - 1 + (1 - p_o)^2 \exp(\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))) & \text{für } |x| < 2r, \\ p_o^2 & \text{für } |x| \geq 2r, \end{cases} \quad (70)$$

denn es gilt (vgl auch die Abbildungen 14 und 15)

$$\begin{aligned}
p_{o,x} &= P(\{o, x\} \in \Xi) \\
&= 1 - P(o \notin \Xi) - P(x \notin \Xi) + P(\{o, x\} \notin \Xi) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + P(\#\{n : S_n \in B(o, r) \cup B(x, r)\} = 0) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + \left(1 - \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)))\right) \\
&= 1 - 2P(o \notin \Xi) + \left(1 - \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)))\right) \\
&= 2p_o - 1 + (1 - p_o)^2 \exp(\lambda_0 \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit genutzt wurde, dass

$$P(o \notin \Xi) = 1 - p_o = \exp(-\lambda_0 \nu_d(B(o, r)))$$

und

$$\nu_d(B(o, r) \cup B(x, r)) = 2\nu_d(B(o, r)) - \nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)).$$

- Wenn $d = 2$, dann ergibt sich für den Ausdruck $\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r))$ in (70), dass

$$\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)) = \begin{cases} 2r^2 \arccos \frac{|x|}{2r} - \frac{|x|}{2} \sqrt{4r^2 - |x|^2} & \text{für } |x| < 2r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r. \end{cases}$$

- Für $d = 3$ gilt

$$\nu_d(B(o, r) \cap B(x, r)) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3 \left(1 - \frac{3|x|}{4r} + \frac{|x|^3}{16r^3}\right) & \text{für } |x| < 2r, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2r. \end{cases}$$

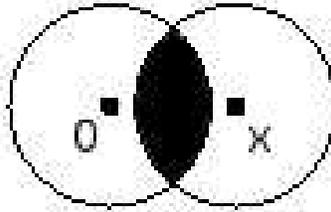


Abbildung 15: Darstellung der Schnittfläche $B(o, r) \cap B(x, r)$

Mit Hilfe von Lemma 3.2 und 3.3 lässt sich nun ähnlich wie in Theorem 3.12 zeigen, dass der Intensitätsschätzer $\widehat{\lambda}_W$ die folgenden Eigenschaften hat.

Theorem 3.13

1. Sei W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist der erwartungstreue Schätzer $\widehat{\lambda}_{W_n}$ schwach konsistent, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (71)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_d(W_n)} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (72)$$

dann existiert der Grenzwert $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \hat{\lambda}_{W_n}$, wobei

$$\sigma^2 = \lambda_1 p_o + \lambda_2 (1 - p_o) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (p_{o,x} - p_o^2) dx \quad (73)$$

und die Überdeckungswahrscheinlichkeiten $p_o = P(o \in \Xi)$ und $p_{o,x} = P(\{o, x\} \in \Xi)$ in (66) bzw. (70) gegeben sind.

3. Außerdem ist dann der Schätzer $\hat{\lambda}_{W_n}$ asymptotisch normalverteilt, d.h., für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x). \quad (74)$$

Beweis

- Weil $\nu_d(W_n \cap \Xi) / \nu_d(W_n) \leq 1$ für jedes $n \geq 1$, ergibt sich aus Lemma 3.2, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \hat{\lambda}_{W_n} = 0.$$

- Hieraus ergibt sich die Gültigkeit von (71) mit Hilfe der Tschebyschew–Ungleichung.
- Außerdem ergibt sich aus Lemma 3.2, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var} \hat{\lambda}_{W_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d(W_n \cap \Xi) + \lambda_2 \nu_d(W_n) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \text{Var} \nu_d(W_n \cap \Xi)}{\nu_d(W_n)} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbb{E} \nu_d([0, 1]^d \cap \Xi) + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} \nu_d(W_n \cap \Xi)}{\nu_d(W_n)}. \end{aligned}$$

- Hieraus und aus Lemma 3.3 ergibt sich die Gültigkeit von (73).
- Um (74) zu zeigen, kann man ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.12 vorgehen, und zwar ergibt sich die Gültigkeit von (74)
 - mit Hilfe des Stetigkeitssatzes für charakteristische Funktionen reellwertiger Zufallsvariablen (vgl. Theorem WR–5.7)
 - und unter Verwendung der Darstellungsformel (28) des erzeugenden Funktionals von Cox–Prozessen
 - bzw. der Taylor–Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. \square

3.3 Cluster–Prozesse

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Modellansatz von „geclusterten“ Punktprozessen, den wir in Abschnitt 3.2.3 zunächst nur für den Spezialfall der Neyman–Scott–Prozesse bzw. der Matérn–Cluster–Prozesse betrachtet hatten.

3.3.1 Definition und erzeugendes Funktional

- Sei $\{S_n\}$ ein beliebiger Punktprozess mit dem Intensitätsmaß $\{\mu^{(0)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, das lokal endlich und diffus sei, und sei $Z = \#\{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$ die (zufällige) Anzahl der Atome von $\{S_n\}$ in \mathbb{R}^d .

- Außerdem sei $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und deren Intensitätsmaß $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ endlich ist, d.h., $\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) < \infty$.

Theorem 3.14 *Das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ sei gegeben durch*

$$N_B = \sum_{n=1}^Z N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (75)$$

1. Wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (76)$$

dann ist $\{N_B\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal endlich, wobei das Intensitätsmaß $\{\mu(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ von $\{N_B\}$ gegeben ist durch

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (77)$$

2. Wenn der Punktprozess $\{S_n\}$ stationär ist mit der Intensität λ_0 , dann ist auch $\{N_B\}$ stationär, und die Intensität $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$ von $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d). \quad (78)$$

Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (75) von $\{N_B\}$ ergibt sich, dass für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbb{E} N_B = \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^Z N_{B-S_j}^{(j)} \right) = \int \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{Z(\{s_n\})} N_{B-s_j}^{(j)} \right) P(d\{s_n\}) = \int \sum_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbb{E} N_{B-s_j}^{(j)} P(d\{s_n\}).$$

– Mit Hilfe des Campbellschen Theorems (vgl. Theorem 3.1) ergibt sich also, dass

$$\mathbb{E} N_B = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} N_{B-x}^{(1)} \mu^{(0)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

– Damit ist (77) bewiesen.

- Aus (76) folgt nun, dass $\mathbb{E} N_B < \infty$ und somit auch $P(N_B < \infty) = 1$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
- Sei $\{S_n\}$ stationär. Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (75) von $\{N_B\}$, dass

$$\begin{aligned} (N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) &= \left(\sum_{i=1}^Z N_{B_1-S_i}^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^Z N_{B_n-S_i}^{(i)} \right) \\ &\stackrel{D}{=} \left(\sum_{i=1}^Z N_{B_1-(S_i-x)}^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^Z N_{B_n-(S_i-x)}^{(i)} \right) \\ &= (N_{B_1+x}, \dots, N_{B_n+x}) \end{aligned}$$

für beliebige $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$, d.h., $\{N_B\}$ ist stationär.

- Die Formel (78) für die Intensität λ von $\{N_B\}$ ergibt sich unmittelbar aus (77), denn es gilt

$$\lambda = \mu([0,1]^d) \stackrel{(77)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}([0,1]^d - x) dx = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d). \quad \square$$

Beachte

- Wenn die Integrierbarkeitsbedingung (76) erfüllt ist, dann sagt man, dass das in (75) definierte zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ ein *Cluster-Prozess* ist.
- Der Punktprozess $\{S_n\}$ heißt *Primärprozess*; die Punktprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ werden *Sekundärprozesse* genannt.
- Wenn $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess ist, dann sagt man, dass $\{N_B\}$ ein *Poissonscher Cluster-Prozess* ist.

Das erzeugende Funktional eines Cluster-Prozesses lässt sich durch die erzeugenden Funktionale der Primär- und Sekundärprozesse ausdrücken. Dabei setzen wir stets voraus, dass die Integrierbarkeitsbedingung (76) erfüllt ist.

Theorem 3.15 Für das erzeugende Funktional $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ des Cluster-Prozesses $\{N_B\}$ gilt

$$\mathbf{G}(f) = \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^Z \mathbf{G}^{[S_n]}(f) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (79)$$

wobei $\mathbf{G}^{[x]} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ das erzeugende Funktional des (um den Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ verschobenen Sekundär-) Punktprozesses $\{N_{B-x}^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist.

Beweis

- Sei $\{S'_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$, und sei $Z' = \#\{n : S'_n \in \mathbb{R}^d\}$ die Gesamtanzahl der Punkte des Cluster-Prozesses $\{N_B\}$.
- Dann ergibt sich aus den Definitionsgleichungen (6) und (75) des erzeugenden Funktionals bzw. des Cluster-Prozesses $\{N_B\}$, dass

$$\mathbf{G}(f) \stackrel{(6)}{=} \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{Z'} f(S'_n) \right) \stackrel{(75)}{=} \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^Z \prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - S_j) \right) \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

wobei $\{S_i^{(j)}, i \geq 1\}$ eine messbare Indizierung der Atome des Sekundärprozesses $\{N_B^{(j)}\}$ und $Z^{(j)} = \#\{i : S_i^{(j)} \in \mathbb{R}^d\}$ die Gesamtanzahl der Punkte von $\{N_B^{(j)}\}$ ist.

- Wegen der Unabhängigkeit der Punktprozesse $\{S_n\}, \{S_i^{(1)}\}, \{S_i^{(2)}\}, \dots$ ergibt sich hieraus, dass

$$\mathbf{G}(f) = \int \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - s_j) \right) P(d\{s_n\}) = \int \prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{Z^{(j)}} f(S_i^{(j)} - s_j) \right) P(d\{s_n\}).$$

- Somit gilt

$$\mathbf{G}(f) = \int \prod_{j=1}^{Z(\{s_n\})} \mathbf{G}^{[s_j]}(f) P(d\{s_n\}) = \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^Z \mathbf{G}^{[S_j]}(f) \right),$$

wobei

$$\mathbf{G}^{[x]}(f) = \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{Z^{(1)}} f(S_i^{(1)} - x) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad \square$$

Beachte

- Das Produkt in (79) kann aus unendlich vielen Faktoren bestehen; insbesondere dann, wenn der Primärprozess $\{S_n\}$ stationär ist.

- Das Produkt in (79) ist dennoch stets wohldefiniert, weil die Werte sämtlicher Faktoren zwischen 0 und 1 liegen.

Korollar 3.3 *Wenn der Primärprozess $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß $\{\mu^{(0)}(B)\}$ ist, dann gilt für das erzeugende Funktional $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ des Poissonschen Cluster-Prozesses $\{N_B\}$, dass*

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (80)$$

Beweis

- Aus der Darstellungsformel (79) für das erzeugende Funktional des Cluster-Prozesses $\{N_B\}$, die in Theorem 3.15 hergeleitet wurde, ergibt sich, dass

$$\mathbf{G}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (81)$$

wobei $\mathbf{G}_0 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ das erzeugende Funktional des Poissonschen Primärprozesses $\{S_n\}$ ist und die Funktion $f'_r \in \mathcal{H}$ gegeben ist durch

$$f'_r(x) = \begin{cases} \mathbf{G}^{[x]}(f) & \text{für } |x| \leq r, \\ 1 & \text{für } |x| > r. \end{cases}$$

– Denn es gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(79)}{=} \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^Z \mathbf{G}^{[S_n]}(f) \right) = \mathbb{E} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n: S_n \in B(o,r)} \mathbf{G}^{[S_n]}(f) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\prod_{n: S_n \in B(o,r)} \mathbf{G}^{[S_n]}(f) \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^Z f'_r(S_n) \right) \\ &\stackrel{(6)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r), \end{aligned}$$

– wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (6) des erzeugenden Funktionals von Punktprozessen ergibt

– und die Vertauschbarkeit von Erwartungswert und Grenzwertbildung in der dritten Gleichheit mit dem Satz über die monotone Konvergenz begründet werden kann.

- Mit Hilfe der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional des Poisson-Prozesses $\{S_n\}$, die in Theorem 3.3 hergeleitet wurde, ergibt sich nun aus (81), dass für jedes $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(f) &\stackrel{(81)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G}_0(f'_r) \\ &\stackrel{(9)}{=} \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (f'_r(x) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left(\int_{B(o,r)} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) \mu^{(0)}(dx)\right). \end{aligned} \quad \square$$

3.3.2 Poissonsche Cluster-Prozesse; Eigenschaften des Intensitätsschätzers

Wir diskutieren nun zwei asymptotische Eigenschaften des Intensitätsschätzers $\hat{\lambda}_W = N_W/\nu_d(W)$ für stationäre Poissonsche Cluster-Prozesse und verallgemeinern dabei die Ergebnisse, die in Abschnitt 3.2.4 für Neyman-Scott-Prozesse hergeleitet worden sind.

- Sei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ_0 . Dann ergibt sich aus Theorem 3.14,
 - dass der Poissonsche Cluster-Prozess $\{N_B\}$ stationär ist und
 - dass

$$\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_d(W)} \quad (82)$$

für jedes $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Intensität λ von $\{N_B\}$ ist.

- Außerdem gilt die folgende Darstellungsformel für die Varianz von $\hat{\lambda}_W$.

Lemma 3.4 Sei $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige Borel-Menge mit $0 < \nu_d(W) < \infty$. Wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx < \infty, \quad (83)$$

dann gilt

$$\text{Var } \hat{\lambda}_W = \frac{\lambda_0}{\nu_d^2(W)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx. \quad (84)$$

Beweis

- Um die Gültigkeit von (84) zu zeigen, gehen wir ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1 vor.
- Mit der Kurzschreibweise $P(d\{s_n\}) = P(\{S_n\} = d\{s_n\})$ ergibt sich aus der Definitionsgleichung (75) von N_W , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} N_{W-s_j}^{(j)} \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (N_{W-s_j}^{(j)} - \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} + \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)}) \right)^2 P(d\{s_n\}) \\ &= \int \left(\sum_{j=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_j}^{(j)} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)} \right)^2 \right) P(d\{s_n\}). \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (N_W)^2 &= \int \left(\sum_{j=1}^{\infty} \text{Var } N_{W-s_j}^{(j)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)})^2 \right) P(d\{s_n\}) \\ &\quad + \int \sum_{i \neq j} (\mathbb{E} N_{W-s_i}^{(i)}) (\mathbb{E} N_{W-s_j}^{(j)}) P(d\{s_n\}) \\ &\stackrel{(5)}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \text{Var } N_{W-x}^{(1)} dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E} N_{W-x}^{(1)})^2 dx + \left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} N_{W-x}^{(1)} dx \right)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus dem Campbellschen Theorem (vgl. Theorem 3.1) ergibt.

- Somit ergibt sich, dass

$$\text{Var } N_W = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W-x}^{(1)})^2 dx. \quad \square$$

Mit Hilfe von Lemma 3.4 ergeben sich die folgenden asymptotischen Eigenschaften des Schätzers $\widehat{\lambda}_W$.

Theorem 3.16

1. Sei W_1, W_2, \dots eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Wenn es Konstanten $c < \infty$ und $\delta \in (0, 1)$ gibt, so dass

$$\nu_d^{\delta-2}(W_n) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n-x}^{(1)})^2 dx \leq c \quad \forall n \geq 1, \quad (85)$$

dann ist der erwartungstreue Schätzer $\widehat{\lambda}_{W_n}$ schwach konsistent, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0. \quad (86)$$

2. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass der Grenzwert

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_d(W_n) \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n-x}^{(1)})^2 dx}{\nu_d(W_n)} \quad (87)$$

existiert, wobei $0 < \sigma^2 < \infty$, und wenn die Lindeberg-Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left((N_{W_n-x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n-x}^{(1)}) \right) dx = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (88)$$

erfüllt ist, dann ist der Schätzer $\widehat{\lambda}_{W_n}$ asymptotisch normalverteilt, d.h.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\sigma^2}} (\widehat{\lambda}_{W_n} - \lambda) \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (89)$$

Beweis

- Aus (84) und (85) folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var } \widehat{\lambda}_{W_n} = 0$. Die stochastische Konvergenz in (86) ergibt sich somit auf die gleiche Weise wie im Beweis der Theoreme 3.12 bzw. 3.13.
- Um die Verteilungskonvergenz (89) zu beweisen, benutzen wir eine „Abschneidetechnik“ und betrachten zunächst die Zufallsvariablen

$$N_{W_n, \varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} N_{W_n - S_k, \varepsilon}^{(n)}, \quad \text{wobei} \quad N_{W_n - S_k, \varepsilon}^{(n)} = N_{W_n - S_k}^{(n)} \mathbb{1}_{[0, \varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}}(N_{W_n - S_k}^{(n)}).$$

- Dabei genügt es zu zeigen, dass es eine Nullfolge $\varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp\left(\text{is} \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var } N_{W_n, \varepsilon}}}\right) \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (90)$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n} - (N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon})}{\sqrt{\text{Var } N_{W_n}}} \right)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } N_{W_n, \varepsilon}}{\text{Var } N_{W_n}} = 1. \quad (91)$$

– Denn (90) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

– und wegen (91) gilt dann auch

$$\frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n}}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

– Mit Hilfe von (84) und (87) ergibt sich hieraus die Gültigkeit von (89).

- Die Nullkonvergenz in (91) ergibt sich unmittelbar aus (87) und (88),
– denn es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{N_{W_n} - \mathbb{E} N_{W_n} - (N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon})}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n}}} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(W_n)}{\text{Var} N_{W_n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left((N_{W_n - x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n - x}^{(1)}) \right) dx \\ &\stackrel{(87)}{=} \sigma^{-2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left((N_{W_n - x}^{(1)})^2 \mathbb{1}_{(\varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)}, \infty)}(N_{W_n - x}^{(1)}) \right) dx \stackrel{(88)}{=} 0. \end{aligned}$$

– Hieraus folgt außerdem, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}{\text{Var} N_{W_n}} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon} - \text{Var} N_{W_n}}{\text{Var} N_{W_n}} = 0.$$

- Um die Gültigkeit von (90) zu zeigen, kann man wie folgt vorgehen.

– Mit Hilfe von Korollar 3.3 ergibt sich so wie im Beweis von Theorem 3.12 (vgl. (60) und (61)), dass

$$\mathbb{E} \exp\left(i s \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left(\exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) dx \right).$$

– Wenn wir dabei die in Lemma 3.4 hergeleitete Varianzformel (84) berücksichtigen, dann erhalten wir insgesamt, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp\left(i s \frac{N_{W_n, \varepsilon} - \mathbb{E} N_{W_n, \varepsilon}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right) \exp\left(\frac{s^2}{2} \right) \\ &= \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left(\exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right)^2 \right) dx \right). \end{aligned}$$

– Aus der Ungleichung

$$\left| \exp(ix) - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ergibt sich nun die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left(\exp \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} - 1 - \frac{i s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{s N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)}}{\sqrt{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}} \right)^2 \right) dx \right| \\ &\leq \frac{\lambda_0 |s|^3 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)})^3 dx}{6 (\text{Var} N_{W_n, \varepsilon})^{3/2}} \leq \frac{\lambda_0 |s|^3 \varepsilon \sqrt{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (N_{W_n - x, \varepsilon}^{(1)})^2 dx}{6 (\text{Var} N_{W_n, \varepsilon})^{3/2}} \\ &= \frac{|s|^3 \varepsilon}{6} \sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\text{Var} N_{W_n, \varepsilon}}}. \end{aligned}$$

- Damit ist (90) bewiesen, weil die Nullfolge $\varepsilon = \varepsilon(n)$ so gewählt werden kann, dass der letzte Ausdruck beliebig klein wird. \square

3.3.3 Beispiele: Gauß–Poisson–Prozesse, Neyman–Scott–Prozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Klassen von Poissonschen Cluster–Prozessen, deren Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}$, $\{N_B^{(2)}\}$, ... jeweils eine spezielle Struktur besitzen. Der Primärprozess $\{S_n\}$ sei in beiden Fällen ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität λ_0 .

1. Gauß–Poisson–Prozesse

- Sei $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren, die den Wert „Unendlich“ annehmen können und die von dem Poissonschen Primärprozess $\{S_n\}$ unabhängig sind. Dabei gelte $P(S^{(1)} = o) = 0$.
- Die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}$, $\{N_B^{(2)}\}$, ... seien gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \delta_o(B) + \delta_{S^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (92)$$

- Der Poissonsche Cluster–Prozess $\{N_B\}$ mit $N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)}$ wird dann *Gauß–Poisson–Prozess* genannt.

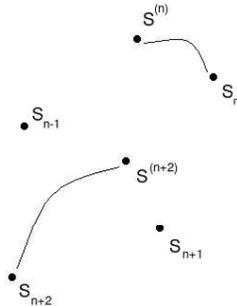


Abbildung 16: Gauss-Poisson-Prozess

Beachte

- Aus (92) ergibt sich, dass jeder Primärpunkt S_n auch ein Punkt des Cluster–Prozesses $\{N_B\}$ ist und dass S_n mit der Wahrscheinlichkeit $p = P(S^{(1)} \in \mathbb{R}^d)$ einen weiteren Sekundärpunkt an der Stelle $S_n + S^{(n)}$ erzeugt, vgl. Abbildung 16.
- Aus Korollar 3.3 folgt, dass das erzeugende Funktional $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ eines Gauß–Poisson–Prozesses gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left((1-p)f(x) + p \int_{\mathbb{R}^d} f(x)f(x+y) P_S(dy) - 1 \right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (93)$$

wobei $P_S : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$ mit $P_S(B) = p^{-1}P(S^{(1)} \in B)$ die bedingte Verteilung der Abweichung des zweiten Sekundärpunktes vom auslösenden Primärpunkt ist (unter der Bedingung, dass es einen solchen zweiten Sekundärpunkt gibt).

2. Neyman–Scott–Prozesse

- Sei $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$ eine Doppel-Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren $S_i^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, die von dem Poissonschen Primärprozess $\{S_n\}$ unabhängig ist.
 - Außerdem sei $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (mit nichtnegativen ganzzahligen Werten), die von den Folgen $\{S_i^{(n)}\}$ und $\{S_n\}$ unabhängig ist.
 - Für die Gesamtanzahlen $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots$ von Sekundärpunkten je Primärpunkt gelte $\mathbb{E}T^{(i)} < \infty$.
- Die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ seien gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \sum_{i=1}^{T^{(n)}} \delta_{S_i^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (94)$$

- Der Poissonsche Cluster-Prozess $\{N_B\}$ mit $N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)}$ wird dann *Neyman–Scott–Prozess* genannt, vgl. Abbildung 17.

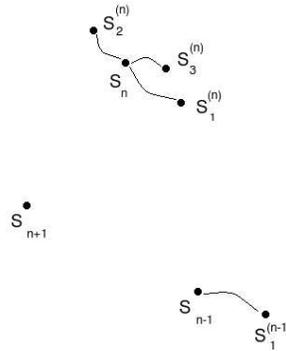


Abbildung 17: Neyman–Scott–Prozess

Beachte

- 1) Aus Korollar 3.3 folgt, dass das erzeugende Funktional $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ eines Neyman–Scott–Prozesses gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(g\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy)\right) - 1\right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (95)$$

wobei $P_S : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ die Verteilung von $S_i^{(n)}$ ist und $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ die erzeugende Funktion der Gesamtanzahl von Sekundärpunkten ist, die von einem Primärpunkt generiert werden, d.h.,

$$g(z) = \mathbb{E} z^{T^{(1)}} \quad \forall z \in [-1, 1].$$

- 2) Wenn die Gesamtanzahl von Sekundärpunkten, die von einem Primärpunkt generiert werden, poissonverteilt ist mit dem Parameter λ_1 , d.h., wenn $g(z) = e^{\lambda_1(z-1)}$ für jedes $z \in [-1, 1]$, dann ergibt sich aus (95), dass

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\exp\left(\lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) P_S(dy) - 1\right)\right) - 1\right) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (96)$$

- 3) Wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass die Verteilung P_S des Vektors zwischen Sekundärpunkt und zugehörigem Primärpunkt absolutstetig ist, dann lässt sich (96) wie folgt umformen.

- Mit Hilfe der Darstellungsformel (9) für das erzeugende Funktional des Poisson-Prozesses $\{S_n\}$, die in Theorem 3.3 hergeleitet wurde, ergibt sich aus (96), dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(f) &= \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left(\lambda_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(S_n + y) P_S(dy) - 1 \right) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp \left(\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(S_n + y) P_S(dy) - 1 \right) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp \left(\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(S_n + y) - 1) P_S(dy) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp \left(\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) P_S(dx - S_n) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - f(x)) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(1)}(x - S_n) dx \right),
\end{aligned}$$

wobei $\lambda^{(1)}(x) = \lambda_1 p_S(x)$ und $p_S : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die Dichte von P_S ist.

- Der letzte Ausdruck stimmt mit den Formeln (47) und (48) überein, d.h., in diesem Fall kann der Neyman-Scott-Prozess $\{N_B\}$ nicht nur als Poissonscher Cluster-Prozess, sondern gleichzeitig auch als Cox-Prozess aufgefasst werden.

3.4 Ergodizität; starke Konsistenz des Intensitätsschätzers

Für stationäre Cox- bzw. Cluster-Prozesse wurden in den Abschnitten 3.2 und 3.3 hinreichende Bedingungen für die schwache Konsistenz des Intensitätsschätzers $\hat{\lambda}_W$ diskutiert.

Wir geben nun einen Ergodensatz für allgemeine dynamische Systeme an und zeigen dann, wie dieser Ergodensatz zum Nachweis der starken Konsistenz von $\hat{\lambda}_W$ genutzt werden kann.

3.4.1 Dynamische Systeme; individueller Ergodensatz

Zunächst zeigen wir, dass stationäre Punktprozesse bzw. stationäre zufällige Maße als dynamische Systeme aufgefasst werden können.

- Zur Erinnerung: Mit \mathbb{N} wird die Familie aller lokal endlichen Zählmaße $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ bezeichnet, d.h., es gilt $\varphi(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$ für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Außerdem betrachten wir
 - die σ -Algebra $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei \mathcal{N} die kleinste σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{N} ist, so dass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist,
 - und die Familie $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ von $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ -messbaren *Verschiebungsoperatoren* $\mathbf{T}_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass

$$(\mathbf{T}_x \varphi)(B) = \varphi(B + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (97)$$

d.h., jedem Zählmaß $\varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n}$ aus \mathbb{N} wird das Zählmaß $\mathbf{T}_x \varphi = \sum_n a_n \delta_{s_n - x}$ zugeordnet, wobei sämtliche Atome von φ um den Vektor $-x$ verschoben werden.

- Die „Gewichte“ $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Atome s_n bleiben dabei unverändert.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der Punktprozess $\{N_B\}$ genau dann stationär ist,
 - wenn seine Verteilung P_N invariant bezüglich $\{\mathbf{T}_x\}$ ist, wobei $P_N(A) = P(N \in A)$ für jedes $A \in \mathcal{N}$,
 - d.h., die in Abschnitt 3.1 betrachtete Definitionsgleichung (16) für die Stationarität von Punktprozessen gilt genau dann, wenn

$$P_N(A) = P_N(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}, \quad (98)$$

wobei $\mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \varphi : \varphi \in A\}$.

- Die Stationarität von beliebigen (nicht notwendig ganzzahligen) zufälligen Maßen $\{\Lambda_B\}$ lässt sich auf die gleiche Weise charakterisieren.
 - Hierfür betrachten wir die Menge \mathbb{M} der lokal endlichen Maße $\eta : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$, d.h., es gilt $\eta(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n)$ für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
 - Außerdem sei \mathcal{M} die kleinste σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{M} , so dass $\eta \mapsto \eta(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung ist.
 - Genauso wie in (97) definieren wir die Familie $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ von $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ -messbaren *Verschiebungsoperatoren* $\mathbf{T}_x : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, so dass

$$(\mathbf{T}_x \eta)(B) = \eta(B + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (99)$$

- Man kann sich leicht überlegen, dass das zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ genau dann stationär ist,
 - wenn seine Verteilung P_Λ invariant bezüglich $\{\mathbf{T}_x\}$ ist, wobei $P_\Lambda(A) = P(\Lambda \in A)$ für jedes $A \in \mathcal{M}$,
 - d.h., die in Abschnitt 3.2 betrachtete Definitionsgleichung (30) für die Stationarität von zufälligen Maßen gilt genau dann, wenn

$$P_\Lambda(A) = P_\Lambda(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{M}. \quad (100)$$

wobei $\mathbf{T}_x A = \{\mathbf{T}_x \eta : \eta \in A\}$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{M}$.

Beachte

- Wenn die Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$ bzw. $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda)$ mit der in (97) bzw. (99) eingeführten Familie $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ von (maßerhaltenden) Verschiebungsoperatoren ergänzt werden, für die (98) bzw. (100) gilt, dann sagt man, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$ und $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda, \mathbf{T})$ *dynamische Systeme* sind.
- Die in (97) bzw. (99) eingeführten Familien $\{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ von Verschiebungsoperatoren besitzen die Eigenschaft einer (algebraischen) *Gruppe*, denn offenbar gilt

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

- In Abschnitt 4 werden wir den Begriff des dynamischen Systems auch für den Fall eines beliebigen, nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{F}, P) benötigen.
 - Dabei wird als Indexmenge G der Operatoren-Gruppe $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$ nicht nur der (kontinuierliche) d -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^d betrachtet, sondern beispielsweise auch die (diskrete) Menge $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ der ganzen Zahlen.
 - Im letzteren Fall wird anstelle des Lebesgue-Maßes über $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, das Zählmaß über $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ betrachtet.
 - Deshalb führen wir nun den Begriff des dynamischen Systems noch in einem allgemeineren Kontext ein, der beide Situationen als Spezialfälle erfasst.

Definition

- Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und sei G eine beliebige Abelsche lokalkompakte Hausdorffsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

- Die Verknüpfungsoperation in G bezeichnen wir weiterhin mit „+“. Außerdem sei $\mathcal{B}(G)$ die σ -Algebra der Borel-Mengen in G , und sei $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$ das (bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte) *Haarsche Maß*, so dass

$$\nu(B) = \nu(B + x) \quad \forall x \in G, B \in \mathcal{B}(G).$$

- Sei $\{\mathbf{T}_x, x \in G\}$ eine Familie von eindeutigen $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ -messbaren Abbildungen $\mathbf{T}_x : \Omega \rightarrow \Omega$. Man sagt, dass $\{\mathbf{T}_x\}$ eine *Strömung* (bzw. ein *Flow*) in (Ω, \mathcal{F}, P) ist, wenn

$$P(A) = P(\mathbf{T}_x A) \quad \forall x \in G, A \in \mathcal{F},$$

$$\mathbf{T}_{x+x'} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{x'} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_x \mathbf{T}_{-x} = \mathbf{I} \quad \forall x, x' \in G,$$

$$\{(x, \omega) : \mathbf{T}_x \omega \in A\} \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

- Wenn $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x\}$ eine Strömung in (Ω, \mathcal{F}, P) ist, dann sagt man, dass das Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ein *dynamisches System* ist.

Die Frage nach der starken Konstistenz des Intensitätsschätzer $\widehat{\lambda}_W$, die wir am Anfang von Abschnitt 3.4 erwähnt hatten, hängt eng mit den beiden folgenden Fragestellungen zusammen.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ein beliebiges dynamisches System, und sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}|X| < \infty$. Außerdem sei $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$ eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge G mit $0 < \nu(W_n) < \infty$ für jedes $n \geq 1$.

- 1) Unter welchen Bedingungen existiert der Grenzwert

$$\overline{X}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} X(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) \quad (101)$$

für P -fast jedes $\omega \in \Omega$, wobei $\nu : \mathcal{B}(G) \rightarrow [0, \infty]$ das Haarsche Maß ist.

- 2) Wann gilt für die in (101) gegebene Zufallsvariable $\overline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\overline{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}), \quad (102)$$

wobei $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{I})$ die bedingte Erwartung von X bezüglich der σ -Algebra

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : A = \mathbf{T}_x A \quad \forall x \in G\}.$$

aller \mathbf{T} -invarianten Mengen aus \mathcal{F} ist.

Das folgende Resultat, dass in der Literatur *individueller Ergodensatz* genannt wird, gibt eine Antwort auf diese beiden Fragen.

Theorem 3.17 *Sei $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$ eine Folge von Borelschen Teilmengen der Index-Menge G , so dass*

$$W_n \subset W_{n+1} \quad \text{und} \quad 0 < \nu(W_n) < \infty \quad \forall n \geq 1, \quad (103)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(W_n \cap (W_n - x))}{\nu(W_n)} = 1 \quad \forall x \in G \quad (104)$$

und

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\nu(W_n - W_n)}{\nu(W_n)} < \infty, \quad (105)$$

wobei $W_n - W_n = \{x - y : x, y \in W_n\}$. Dann existiert der Grenzwert in (101) für P -fast jedes $\omega \in \Omega$, und es gilt (102).

Einen Beweis von Theorem 3.17 findet man beispielsweise in dem Buch von A.A. Tempelman (1992), *Ergodic Theorems for Group Actions: Informational and Thermodynamical Aspects*, Kluwer, Dordrecht.

Beachte Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass der Grenzwert $\bar{X}(\omega)$ in (101) existiert und P -fast sicher konstant ist. Dann ergibt sich aus (102), dass

$$\bar{X} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{I}) = \mathbb{E}X, \quad (106)$$

d.h., das „Raummittel“ \bar{X} stimmt mit dem „Scharmittel“ $\mathbb{E}X$ überein.

Definitionen

- Eine Folge $W_1, W_2, \dots \in \mathcal{B}(G)$ von Borelschen Teilmengen der Index-Menge G , die den Bedingungen (103) – (105) genügt, wird *mittelnde Folge* genannt.
- Man sagt, dass das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ *ergodisch* ist, wenn für jede integrierbare Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und für jede mittelnde Folge $\{W_n\}$ gilt, dass die in (101) gegebene Zufallsvariable $\bar{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant ist.
- Ein stationärer Punktprozess $\{N_B\}$ heißt *ergodisch*, wenn das dynamische System $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$ ergodisch ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass der Intensitätsschätzer $\hat{\lambda}_W = N_B/\nu_d(W)$ die folgende (starke) Konsistenz-eigenschaft besitzt, wenn der Punktprozess $\{N_B\}$ ergodisch ist. Beispiele ergodischer Punktprozesse werden wir später in Abschnitt 3.4.3 diskutieren.

Theorem 3.18 Sei $\{N_B\}$ ein ergodischer Punktprozess mit der Intensität λ . Dann gilt

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_{[-n, n]^d} = \lambda\right) = 1. \quad (107)$$

Beweis

- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Punktprozess $\{N_B\}$ über dem „kanonischen“ Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$ gegeben ist.
- Dann gilt für beliebige $n \geq 1$ und $\varphi \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} N_{[-n, n]^d}(\varphi) &= \varphi([-n, n]^d) = \int_{[-n, n]^d} \varphi(dx) \\ &= \int_{[-n, n]^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{[x-1, x]}(y) dy \varphi(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[-n, n]^d} \mathbb{I}_{[x-1, x]}(y) \varphi(dx) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi([-n, n]^d \cap [y, y+1]) dy. \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\int_{[-n, n-1]^d} \varphi([y, y+1]) dy \leq N_{[-n, n]^d}(\varphi) \leq \int_{[-n-1, n]^d} \varphi([y, y+1]) dy$$

bzw.

$$\int_{[-n, n-1]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy \leq N_{[-n, n]^d}(\varphi) \leq \int_{[-n-1, n]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy.$$

- Weil $\{W_n\}$ und $\{W'_n\}$ mit $W_n = [-n, n-1]^d$ bzw. $W'_n = [-n-1, n]^d$ mittelnde Folgen sind und weil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-n, n-1]^d)}{\nu_d([-n, n]^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-n-1, n]^d)}{\nu_d([-n, n]^d)} = 1,$$

ergibt sich nun mit Hilfe von Theorem 3.17, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{[-n, n]^d}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n, n]^d}(\varphi)}{\nu_d([-n, n]^d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-n, n]^d)} \int_{[-n, n]^d} \mathbf{T}_y \varphi([0, 1]^d) dy$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und konstant ist.

- Somit ergibt sich mit Hilfe von (102) und (106), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{[-n, n]^d} = \int_{\mathbb{N}} \varphi([0, 1]^d) P_N(d\varphi) = \lambda. \quad \square$$

Beachte

- Die Aussage von Theorem 3.18 gilt natürlich nicht nur für kubische Beobachtungsfenster der Form $W_n = [-n, n]^d$.
- Wenn $\{N_B\}$ ergodisch ist mit der Intensität λ , dann lässt sich auf ähnliche Weise wie im Beweis von Theorem 3.18 zeigen, dass zum Beispiel auch

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_{B(o, n)} = \lambda\right) = 1.$$

- Die Gültigkeit von Theorem 3.18 kann darüber hinaus für Folgen von Beobachtungsfenstern gezeigt werden, die nicht konvex sind und die oft bei geographischen Daten betrachtet werden.
 - Beispielsweise gilt Theorem 3.18 auch dann, wenn $\{W_n\}$ durch die *Dilatation* einer polykonvexen Menge gebildet wird,
 - d.h., wenn

$$W_n = \left(\bigcup_{i=1}^j B_i\right) \oplus B(o, n) \quad \forall n \geq 1,$$

wobei die Mengen $B_1, \dots, B_j \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ konvex sind mit $o \in \text{int}B_{i_0}$ für ein $i_0 \in \{1, \dots, j\}$ und die *Minkowski-Summe* $A \oplus B$ gegeben ist durch $A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

3.4.2 Ergodizitätskriterien

In der Literatur werden weitere (äquivalente) Definitionsmöglichkeiten für die Ergodizität von dynamischen Systemen betrachtet. Wir erwähnen hier zunächst zwei solcher Ergodizitätskriterien, ohne sie zu beweisen.

Theorem 3.19 *Das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ist genau dann ergodisch, wenn*

$$\max\{P(A), P(A^c)\} = 1 \quad \forall A \in \mathcal{I} \quad (108)$$

oder wenn jede Darstellung

$$P = pP' + (1-p)P'' \quad \text{mit } p \in [0, 1] \quad (109)$$

des Wahrscheinlichkeitsmaßes P als Mischung zweier \mathbf{T} -invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße P', P'' über \mathcal{F} trivial ist, d.h., wenn $\max\{p, 1-p\} = 1$ oder $P' = P''$.

Beachte

- Die Bedingung (108) bedeutet, dass die \mathbf{T} -invarianten Teilmengen $A \in \mathcal{I}$ eines ergodischen dynamischen Systems $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ nur die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 besitzen können.
- Es ist klar, dass jede Linearkombination (109) von \mathbf{T} -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen P', P'' über \mathcal{F} erneut ein \mathbf{T} -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt. In diesem Sinne bildet die Familie aller \mathbf{T} -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über \mathcal{F} einen *Simplex*.
- Die Bedingung (109) bedeutet, dass die ergodischen \mathbf{T} -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße über \mathcal{F} die *Eckpunkte* dieses Simplex bilden.

Mit Hilfe von Theorem 3.19 lässt sich auf einfache Weise noch ein drittes Ergodizitätskriterium herleiten.

Theorem 3.20 *Das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ist genau dann ergodisch, wenn es eine mittelnde Folge $\{W_n\}$ gibt, so dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) = P(A) P(A') \quad \forall A, A' \in \mathcal{F}. \quad (110)$$

Beweis

- Wir nehmen zunächst an, dass das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ergodisch ist, und zeigen, dass (110) für jede mittelnde Folge $\{W_n\}$ gilt.
- Aus der \mathbf{T} -Invarianz des Wahrscheinlichkeitsmaßes P ergibt sich, dass für beliebige $A, A' \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(\mathbf{T}_{-x} A \cap A') \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \int_{A'} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) P(d\omega) \nu(dx) = \int_{A'} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) P(d\omega) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) - P(A) P(A') \right| &= \left| \int_{A'} \left(\frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right) P(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{A'} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| P(d\omega). \end{aligned}$$

- Um die Gültigkeit von (110) zu beweisen, ist zu zeigen, dass der letzte Ausdruck gegen 0 strebt für $n \rightarrow \infty$.
 - Dies ergibt sich aus dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz, denn es gilt

$$\left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) - P(A) \right| \leq 1,$$

- und mit $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$ ergibt sich aus (101) und (106), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \omega) \nu(dx) = \mathbb{E} \mathbb{1}_A = P(A).$$

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass (110) für eine mittelnde Folge $\{W_n\}$ gilt.

– Für $A = A' \in \mathcal{I}$ gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A) \nu(dx) = \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A) \nu(dx) \\ &= \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) \longrightarrow P(A) P(A'), \end{aligned}$$

d.h., es gilt $P(A) = (P(A))^2$ bzw. $\max\{P(A), P(A^c)\} = 1$.

– Aus der Bedingung (108) in Theorem 3.19 ergibt sich somit, dass $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ergodisch ist. \square

Beachte

- Bei Anwendungen von Theorem 3.20 kann es nützlich sein zu beachten, dass sich die Ergodizität von $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ bereits aus der Gültigkeit von (110) für alle $A, A' \in \mathcal{R}$ ergibt, wobei $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ ein Halbring ist, der die σ -Algebra \mathcal{F} erzeugt.
- Unter einem *Halbring* \mathcal{R} versteht man dabei ein nichtleeres Mengensystem, das die folgenden Eigenschaften besitzt:
 - Aus $A, A' \in \mathcal{R}$ folgt, dass $A \cap A' \in \mathcal{R}$.
 - Für beliebige $A, A' \in \mathcal{R}$ mit $A \supset A'$ gibt es eine endliche Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$, so dass $A \setminus A' = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

In diesem Zusammenhang benötigen wir ein grundlegendes Resultat der Mengen–Algebra, das in der Literatur der *Satz über monotone Klassen* (bzw. *Monotone Class Theorem*) genannt wird.

Lemma 3.5

- Sei \mathcal{R} ein Halbring von Teilmengen von Ω , der die Ereignis– σ -Algebra \mathcal{F} erzeugt, d.h., $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{R})$.
- Sei \mathcal{G} ein weiteres System von Teilmengen von Ω , so dass
 - 1) $\mathcal{R} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ und $\Omega \in \mathcal{G}$,
 - 2) $\bigcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{G}$ für jede endliche Folge $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{G}$,
 - 3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{G}$ für jede monotone Folge $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{G}$ mit $B_1 \subset B_2 \subset \dots$.
- Dann gilt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Mit Hilfe von Lemma 3.5 können wir nun zeigen, wie die Bedingung in Theorem 3.20 abgeschwächt werden kann.

Theorem 3.21 Sei \mathcal{R} ein Halbring von Teilmengen von Ω mit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{R})$. Dann ist das dynamische System $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{T})$ ergodisch, wenn es eine mittelnende Folge $\{W_n\}$ gibt, so dass (110) für beliebige $A, A' \in \mathcal{R}$ gilt.

Beweis

- Sei $\{W_n\}$ eine mittelnende Folge, so dass (110) für beliebige $A, A' \in \mathcal{R}$ gilt. Wegen Theorem 3.20 genügt es zu zeigen, dass dann (110) auch für beliebige $A, A' \in \mathcal{F}$ gilt.
- Wir zeigen zunächst, dass (110) für beliebige $A \in \mathcal{G}$, $A' \in \mathcal{R}$ gilt, wobei \mathcal{G} ein System von Teilmengen von Ω ist, das den Bedingungen von Lemma 3.5 genügt.

- Aus der Additivität von Wahrscheinlichkeitsmaßen ergibt sich, dass (110) für beliebige A, A' mit $A = A_1 \cup A_2$ und $A_1, A_2, A' \in \mathcal{R}$ gilt, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left(P(A_1 \cap \mathbf{T}_x A') + P(A_2 \cap \mathbf{T}_x A') - P((A_1 \cap A_2) \cap \mathbf{T}_x A') \right) \nu(dx) \\ &= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) P(A') = P(A) P(A'). \end{aligned}$$

- Auf ähnliche Weise ergibt sich, dass (110) für Mengen A, A' gilt, wobei $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ und $A_1, \dots, A_n, A' \in \mathcal{R}$.
- Hieraus ergibt sich für beliebige $A', A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$, dass

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) P(A') \nu(dx) \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) \right| \nu(dx) \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i \cap \mathbf{T}_x A'\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i\right) P(A') \right| \nu(dx) \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(W_n)} \int_{W_n} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^j A_i\right) P(A') - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) P(A') \right| \nu(dx) \\ & \leq 2 P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^j A_i\right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck gegen 0 strebt für $j \rightarrow \infty$, d.h., (110) gilt für beliebige Mengen A, A' mit $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ und $A', A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$.

- Weil (110) offenbar auch für A, A' mit $A = \Omega$ und $A' \in \mathcal{R}$ gilt, ergibt sich aus Lemma 3.5, dass (110) für beliebige A, A' mit $A \in \mathcal{F}$ und $A' \in \mathcal{R}$ gilt.
- Durch Vertauschung der Rollen von A und A' ergibt nun auf die gleiche Weise, dass (110) für beliebige A, A' mit $A, A' \in \mathcal{F}$ gilt. \square

3.4.3 Ergodizität von Cox-Prozessen; Beispiele

In diesem Abschnitt diskutieren wir Beispiele von ergodischen Cox-Prozessen, wobei wir zunächst zeigen, dass homogene Poisson-Prozesse ergodisch sind. Danach leiten wir allgemeine Bedingungen für die Ergodizität von Cox-Prozessen her. Schließlich zeigen wir, dass die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten modulierten Poisson-Prozesse ergodisch sind.

- Zur Erinnerung: Man sagt, dass ein stationärer Punktprozess $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ergodisch ist, wenn das dynamische System $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$ ergodisch ist.
- Analog hierzu sagt man, dass ein stationäres zufälliges Maß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ergodisch ist, wenn das dynamische System $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, P_\Lambda, \mathbf{T})$ ergodisch ist.
- Ein stationäres Intensitätsfeld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ heißt ergodisch, wenn das dynamische System $(\mathbb{D}, \mathcal{D}, P_{\{\lambda_x\}}, \mathbf{T})$ ergodisch ist.
 - Dabei ist \mathbb{D} die Familie aller ν_d -Äquivalenzklassen von Lebesgue-messbaren und lokal integrierbaren nichtnegativen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, d.h., zwei solche Funktionen $f, f' : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ werden als identisch erachtet, wenn $f(x) = f'(x)$ für ν_d -fast jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

- \mathcal{D} ist die kleinste σ -Algebra von Teilmengen von \mathbb{D} , so dass sämtliche Abbildungen $f \mapsto \eta$ von \mathbb{D} nach \mathbb{M} mit

$$\eta(B) = \int_B f(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (111)$$

$(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -messbar sind.

- Die Verschiebungsoperatoren $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ gegeben sind durch

$$(\mathbf{T}_x f)(y) = f(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, f \in \mathbb{D}.$$

Theorem 3.22 Sei $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ . Dann ist $\{N_B\}$ ergodisch.

Beweis

- Wir betrachten das dynamische System $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N, \mathbf{T})$ und zeigen, dass (110) für die mittelnde Folge $\{W_n\}$ mit $W_n = [-n, n]^d$ und für beliebige $A, A' \in \mathcal{R}$ gilt, wobei das Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{R} = \left\{ \{ \varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, m \}, m \geq 1, B_i \in \mathcal{Q}^d, k_i, \ell_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\} \right\}. \quad (112)$$

- Für beliebige $m, m' \geq 1, B_i, B'_i \in \mathcal{Q}^d$ und $k_i, k'_i, \ell_i, \ell'_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ sei nun

$$A = \{ \varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, m \} \quad \text{und} \quad A' = \{ \varphi \in \mathbb{N} : k'_i \leq \varphi(B'_i) < \ell'_i, i = 1, \dots, m' \}.$$

- Die Radius $r > 0$ sei so gewählt, dass $(\bigcup_{i=1}^m B_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{m'} B'_i) \subset B(o, r)$.
- Aus der Homogenität und den Unabhängigkeitseigenschaften des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich dann, dass

$$P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') = P_N(A) P_N(\mathbf{T}_x A') = P_N(A) P_N(A') \quad \forall x \in [-n, n]^d \setminus B(o, 2r). \quad (113)$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-n, n]^d)} \int_{[-n, n]^d} P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu_d(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^d} \int_{[-n, n]^d \setminus B(o, 2r)} P_N(A \cap \mathbf{T}_x A') \nu_d(dx) \\ &\stackrel{(113)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^d} \int_{[-n, n]^d \setminus B(o, 2r)} P_N(A) P_N(A') \nu_d(dx) = P_N(A) P_N(A'). \end{aligned}$$

- Weil das in (112) eingeführte Mengensystem \mathcal{R} ein Halbring ist mit $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{N}$, ergibt sich nun die Behauptung mit Hilfe von Theorem 3.21. \square

Theorem 3.23 Ein stationärer Cox-Prozess $\{N_B\}$ ist genau dann ergodisch, wenn das zugehörige zufällige Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ ergodisch ist.

Beweis

- Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen zunächst an, dass das zufällige Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ von $\{N_B\}$ nicht ergodisch ist.

– Wegen der Darstellungsformel (109) in Theorem 3.19 hat die Verteilung P_Λ von $\{\Lambda_B\}$ die Form

$$P_\Lambda = p P'_\Lambda + (1-p) P''_\Lambda, \quad 0 < p < 1, \quad (114)$$

wobei P'_Λ, P''_Λ zwei \mathbf{T} -invariante Wahrscheinlichkeitsmaße über \mathcal{M} sind mit $P'_\Lambda \neq P''_\Lambda$.

– Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Darstellungsformel (25) für die Verteilung von Cox-Prozessen, dass auch die Verteilung P_N von $\{N_B\}$ die Form

$$P_N = p P'_N + (1-p) P''_N$$

hat, wobei $0 < p < 1$.

– Dabei ergibt sich aus Theorem 3.7, dass $P'_N \neq P''_N$, und aus Theorem 3.8, dass P'_N, P''_N zwei \mathbf{T} -invariante Wahrscheinlichkeitsmaße über \mathcal{N} sind.

– Durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt sich somit, dass $\{N_B\}$ nicht ergodisch ist.

- Wir nehmen nun umgekehrt an, dass der Cox-Prozess $\{N_B\}$ nicht ergodisch ist, und zeigen, dass dann auch das zugehörige zufällige Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ nicht ergodisch ist.

– Wegen Theorem 3.19 gibt es eine \mathbf{T} -invariante Menge $A \in \mathcal{N}$ mit $0 < P_N(A) < 1$.

– Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Darstellungsformel (25) für die Verteilung von Cox-Prozessen, dass

$$0 < P_\Lambda(\eta \in \mathbb{M} : P_N(A | \Lambda = \eta) \leq c) < 1 \quad (115)$$

für einen gewissen Schwellenwert $c \in (0, 1)$.

– Weil $A \in \mathcal{N}$ eine \mathbf{T} -invariante Menge ist, gilt

$$P_N(A | \Lambda = \eta) = P_N(\mathbf{T}_x A | \Lambda = \mathbf{T}_x \eta) = P_N(A | \Lambda = \mathbf{T}_x \eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{M}, x \in \mathbb{R}^d.$$

– Dies bedeutet, dass die in (115) betrachtete Menge $\{\eta \in \mathbb{M} : P_N(A | \Lambda = \eta) \leq c\}$ ebenfalls \mathbf{T} -invariant ist.

– Hieraus und aus (115) ergibt sich durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19, dass $\{\Lambda_B\}$ nicht ergodisch ist. \square

Korollar 3.4 Sei $\{\lambda_x\}$ ein stationäres Intensitätsfeld, und sei $\{N_B\}$ der zugehörige stationäre Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$, wobei

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (116)$$

Wenn das Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ ergodisch ist, dann ist auch der Cox-Prozess $\{N_B\}$ ergodisch.

Beweis

- Sei $A \in \mathcal{M}$ eine \mathbf{T} -invariante Menge von absolutstetigen Maßen aus \mathbb{M} , und sei $A_{\mathbb{D}} \in \mathcal{D}$ das Urbild von A unter der in (111) betrachteten Abbildung $f \mapsto \eta$ von \mathbb{D} nach \mathbb{M} .

– Weil $\mathbf{T}_x \eta \in A$ für beliebige $\eta \in A$, $x \in \mathbb{R}^d$ und weil

$$(\mathbf{T}_x \eta)(B) = \eta(B-x) = \int_{B-x} f(y) dy = \int_B f(y-x) dy = \int_B (\mathbf{T}_{-x} f)(y) dy \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

gilt somit auch $\mathbf{T}_{-x} f \in A_{\mathbb{D}}$ bzw. $\mathbf{T}_x f \in A_{\mathbb{D}}$ für beliebige $f \in A_{\mathbb{D}}$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

– D.h., das Urbild $A_{\mathbb{D}} \in \mathcal{D}$ ist ebenfalls eine \mathbf{T} -invariante Menge.

- Das Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ sei nun ergodisch.

– Dann ergibt sich aus Theorem 3.19, dass $\max\{P_{\{\lambda_x\}}(A_{\mathbb{D}}), P_{\{\lambda_x\}}(A_{\mathbb{D}}^c)\} = 1$.

- Hieraus folgt, dass $\max\{P_\Lambda(A), P_\Lambda(A^c)\} = 1$ für jede eine \mathbf{T} -invariante Menge $A \in \mathcal{M}$ von absolutstetigen Maßen aus \mathbb{M} .
- Durch die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt sich nun, dass das zufällige Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ ergodisch ist.
- Aus Theorem 3.23 ergibt sich somit, dass auch der zugehörige Cox-Prozess $\{N_B\}$ ergodisch ist. \square

Beachte

- 1) Mit Hilfe von Korollar 3.4 lässt sich sofort zeigen, dass $\{N_B\}$ ergodisch ist, wenn $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ ist.
 - Denn für das Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ von $\{N_B\}$ gilt dann, dass $P(\lambda_x \equiv \lambda) = 1$ und somit $P(A) = 0$ für alle anderen \mathbf{T} -invarianten Mengen $A \in \mathcal{D}$.
 - Aus Theorem 3.19 ergibt sich nun, dass $\{\lambda_x\}$ ergodisch ist.
 - Wegen Korollar 3.4 ist also auch der Poisson-Prozess $\{N_B\}$ ergodisch.
- 2) Auf ähnliche Weise kann man sich überlegen, dass der in Abschnitt 3.2.3 eingeführte modulierte Poisson-Prozess $\{N_B\}$ ergodisch ist.
 - Denn das Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ von $\{N_B\}$ kann als zufälliges Feld über dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P)$ des zugrundeliegenden homogenen Poisson-Prozesses $\{S_n\}$ aufgefasst werden,
 - d.h., es gibt eine $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ -messbare Abbildung, die jeder Realisierung von $\{S_n\}$ eine Realisierung von $\{\lambda_x\}$ zuordnet.
 - Dabei besitzen die verschiebungsinvarianten Mengen von Realisierungen des zufälligen Feldes $\{\lambda_x\}$, deren Wahrscheinlichkeit nicht 0 ist, die Form $\{\{\lambda_x(\varphi), x \in \mathbb{R}^d\} : \varphi \in A\}$, wobei $A \in \mathcal{N}$ eine \mathbf{T} -invariante Teilmenge von \mathbb{N} ist.
 - Weil

$$P(\{\lambda_x(\varphi), x \in \mathbb{R}^d\} : \varphi \in A) = P_N(A) \tag{117}$$
 und weil der Poisson-Prozess $\{S_n\}$ ergodisch ist, können wegen Theorem 3.19 die in (117) betrachteten Wahrscheinlichkeiten nur die Werte 0 oder 1 annehmen.
 - Wegen Theorem 3.19 bedeutet dies, dass $\{\lambda_x\}$ ergodisch ist.
 - Hieraus und aus Korollar 3.4 ergibt sich die Ergodizität des modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$.

3.4.4 Ergodische Cluster-Prozesse

Bevor wir einige Beispiele ergodischer Cluster-Prozesse kurz diskutieren, geben wir zunächst ein allgemeines Ergodizitätskriterium für stationäre Cluster-Prozesse an.

Theorem 3.24 *Ein stationärer Cluster-Prozess $\{N_B\}$ ist genau dann ergodisch, wenn der zugrundeliegende Primärprozess $\{S_n\}$ ergodisch ist.*

Der Beweis von Theorem 3.24 wird weggelassen, denn er verläuft völlig analog zum Beweis von Theorem 3.23.

Beachte

- 1) Aus den Theoremen 3.22 und 3.24 ergibt sich sofort, dass jeder stationäre Poissonsche Cluster-Prozess ergodisch ist.

- Hieraus folgt insbesondere, dass die in Abschnitt 3.3.3 betrachteten Gauß–Poisson–Prozesse und Neyman–Scott–Prozesse ergodisch sind.
 - Wegen der am Ende von Abschnitt 3.3.3 gemachten Anmerkungen ist außerdem klar, dass auch der Matérn–Cluster–Prozess ergodisch ist, der in Abschnitt 3.2.3 eingeführt worden ist.
- 2) Mit Hilfe von Theorem 3.24 können jedoch auch ergodische Cluster–Prozesse gewonnen werden, deren Primärprozesse keine Poisson–Prozesse sind.
- Beispielsweise ergibt sich aus Theorem 3.24, dass jeder stationäre Cluster–Prozess ergodisch ist, dessen Primärprozess ein ergodischer Cox–Prozess ist.
 - Dies gilt also insbesondere dann, wenn der Primärprozess ein modulierter Poisson–Prozess ist.

4 Palmsche Verteilung und weitere Kenngrößen von Punktprozessen

- Sei $S_1, S_2, \dots \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ eine Folge von Zufallsvektoren über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \quad (1)$$

und

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j. \quad (2)$$

- Wir setzen voraus, dass das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit $N_B = \#\{n : S_n \in B\}$ stationär ist und dass seine Intensität $\lambda = \mathbb{E} N_{[0,1]^d}$ positiv und endlich ist.
- Außerdem setzen wir voraus, dass $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$, d.h., das zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ hat mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Atome, vgl. Theorem 3.5.

4.1 Palmsche Verteilung

4.1.1 Definition durch Intensitätsquotienten; typischer Punkt

Die Grundidee bei der Definition der Palmschen Verteilung des stationären zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ besteht darin,

- für jede (beliebige, jedoch fest vorgegebene) messbare Teilmenge $A \in \mathcal{N}$ des kanonischen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, P_N)$ nur diejenigen Atome von $\{N_B\}$ zu betrachten, aus deren Sicht das zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ die Eigenschaft A hat.
- Mit anderen Worten: Für jedes $A \in \mathcal{N}$ betrachten wir das zufällige Zählmaß $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, das gegeben ist durch

$$N_{B,A} = \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\}. \quad (3)$$

- *Beispiel:* Wenn $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0\}$ für ein $r > 0$, dann werden durch $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ diejenigen Punkte von $\{N_B\}$ erfasst, für die der Abstand zu ihrem nächsten Nachbarn größer als r ist.

Theorem 4.1 *Für jedes $A \in \mathcal{N}$ ist das in (3) eingeführte zufällige Zählmaß $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär. Wenn $\{N_B\}$ ergodisch ist, dann ist auch $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ für jedes $A \in \mathcal{N}$ ergodisch.*

Beweis

- Wir zeigen zuerst, dass $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär ist.
 - Für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $A \in \mathcal{N}$ gilt

$$\begin{aligned} N_{B+x,A} &= \#\{n : S_n \in B+x, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= \#\{n : S_n - x \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= \#\{n : S_n - x \in B, \{N_{(B'-x)-(S_n-x)}\} \in A\} \\ &\stackrel{D}{=} \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\} \\ &= N_{B,A}, \end{aligned}$$

wobei sich die vorletzte Gleichheit aus der Stationarität von $\{N_B\}$ ergibt.

- Auf analoge Weise ergibt sich für beliebige $k \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^d$, $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $A \in \mathcal{N}$, dass

$$(N_{B_1+x,A}, \dots, N_{B_k+x,A}) \stackrel{D}{=} (N_{B_1,A}, \dots, N_{B_k,A}).$$

- Sei nun $\{N_B\}$ ergodisch.

- Für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{N}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und für jedes $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{s_n}$ aus \mathbb{N} mit $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_x(\varphi_A))(B) &= \#\{n : s_n - x \in B, \{\varphi(B' - s_n)\} \in A\} \\ &= \#\{n : s_n - x \in B, \{(\mathbf{T}_x\varphi)(B' - (s_n - x))\} \in A\} \\ &= (\mathbf{T}_x\varphi)_A(B), \end{aligned}$$

- Insgesamt gilt also

$$\mathbf{T}_x(\varphi_A) = (\mathbf{T}_x\varphi)_A \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{N}. \quad (4)$$

- Sei \mathbb{N}_A die Bildmenge von \mathbb{N} für die in (3) betrachtete Abbildung $\varphi \mapsto \varphi_A$.
- Wegen (4) ist das Urbild A'_A jeder \mathbf{T} -invarianten Menge A' aus $\mathcal{N} \cap \mathbb{N}_A$ eine \mathbf{T} -invariante Menge aus \mathcal{N} .
- Hieraus und aus der Ergodizität von $\{N_B\}$ ergibt sich mit Hilfe von Theorem 3.19, dass

$$\max\{P_{\{N_{B,A}\}}(A'), P_{\{N_{B,A}\}}((A')^c)\} = \max\{P_{\{N_B\}}(A'_A), P_{\{N_B\}}((A'_A)^c)\} = 1 \quad \forall A' \in \mathcal{I} \cap \mathbb{N}_A.$$

- Die erneute Anwendung von Theorem 3.19 ergibt nun, dass $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ergodisch ist. \square

Definition

- Für jedes $A \in \mathcal{N}$ sei $\lambda(A)$ die Intensität des stationären Zählmaßes $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.

- Dann ist durch die Mengenfunktion $P_N^0 : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$P_N^0(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda} \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (5)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über \mathcal{N} gegeben.

- Denn aus der Definitionsgleichung (3) von $N_{B,A}$ und aus dem Satz über die monotone Konvergenz ergibt sich, dass für jede Folge A_1, A_2, \dots von paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{N}

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} N_{[0,1]^d, A_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{i=1}^k \#\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in A_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^k A_i\right\} \\ &\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{=} \mathbb{E} \lim_{k \rightarrow \infty} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^k A_i\right\} \\ &= \mathbb{E} \#\left\{n : S_n \in [0, 1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \\ &= \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right). \end{aligned}$$

- Das in (5) eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß P_N^0 wird die *Palmsche Verteilung* des stationären Zählmaßes $\{N_B\}$ genannt.

Beachte

- Manchmal ist es zweckmäßig, die folgende (mit (5) äquivalente) Formel zur Darstellung der Palmschen Wahrscheinlichkeiten $P_N^0(A)$ zu betrachten.
- Für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(B) < \infty$ gilt

$$P_N^0(A) = \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in B, \{N_{B'-S_n}\} \in A\}}{\lambda \nu_d(B)} = \frac{\int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) P_N(d\varphi)}{\lambda \nu_d(B)} \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (6)$$

weil das zufällige Zählmaß $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ stationär ist (vgl. Theorem 4.1) und sein Intensitätsmaß somit proportional zum d -dimensionalen Lebesgue-Maß ν_d ist.

Außerdem besitzt die Palmsche Verteilung P_N^0 die folgende (elementare) Eigenschaft, die sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung (3) von $N_{B,A}$ ergibt.

Theorem 4.2 Sei $\mathbb{N}^0 = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(\{o\}) > 0\}$ die Menge derjenigen Zählmaße aus \mathbb{N} , die im Nullpunkt ein Atom besitzen. Dann gilt

$$P_N^0(\mathbb{N}^0) = 1. \quad (7)$$

Beweis Für $A = \mathbb{N}^0$ ergibt sich aus (3) und (5), dass

$$\begin{aligned} P_N^0(\mathbb{N}^0) &\stackrel{(5)}{=} \frac{\lambda(\mathbb{N}^0)}{\lambda} = \frac{\mathbb{E} N_{[0,1]^d, \mathbb{N}^0}}{\lambda} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0,1]^d, \{N_{B-S_n}\} \in \mathbb{N}^0\}}{\lambda} \\ &= \frac{\mathbb{E} \#\{n : S_n \in [0,1]^d\}}{\lambda} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Für statistische Fragestellungen ist es nützlich, dass sich die Palmschen Wahrscheinlichkeiten $P_N^0(A)$ im ergodischen Fall als Grenzwert von relativen Häufigkeiten darstellen lassen.

Theorem 4.3 Wenn $\{N_B\}$ ergodisch ist, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$P_N^0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{N_{[-n,n]^d}}. \quad (8)$$

Beweis

- Wegen Theorem 4.1 ist mit $\{N_B\}$ auch das zufällige Zählmaß $\{N_{B,A}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ergodisch.
- Hieraus und aus Theorem 3.18 ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{N_{[-n,n]^d}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d, A}}{(2n)^d} \Big/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{[-n,n]^d}}{(2n)^d} \\ &\stackrel{\text{Theorem 3.18}}{=} \frac{\lambda(A)}{\lambda} = P_N^0(A). \quad \square \end{aligned}$$

Beachte

- Weil die Palmische Wahrscheinlichkeit $P_N^0(A)$ im ergodischen Fall als Grenzwert der relativen Häufigkeiten $N_{[-n,n]^d,A} / N_{[-n,n]^d}$ in (8) dargestellt werden kann, kann man $P_N^0(A)$ als die Wahrscheinlichkeit auffassen, dass der Punktprozess $\{S_n\}$ von einem zufällig herausgegriffenen Punkt S_m aus gesehen, die Eigenschaft A hat.
- Man sagt deshalb auch, dass $P_N^0(A)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der *typische Punkt* von $\{N_B\}$ die Eigenschaft A hat.
- Wenn beispielsweise $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o,r) \setminus \{o\}) = 0\}$ für ein $r > 0$, dann ist $P_N^0(A)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Abstand zum nächsten Nachbarn des typischen Punktes größer als r ist; vgl. Abbildung 18.
- Im ergodischen Fall liefert die Formel (8) einen natürlichen Ansatz zur (konsistenten) Schätzung der Palmischen Wahrscheinlichkeit $P_N^0(A)$, wenn die Anzahlen $N_{[-n,n]^d}$ und $N_{[-n,n]^d,A}$ für ein großes n , d.h., für ein großes Beobachtungsfenster $W_n = [-n,n]^d$ bestimmt werden können.

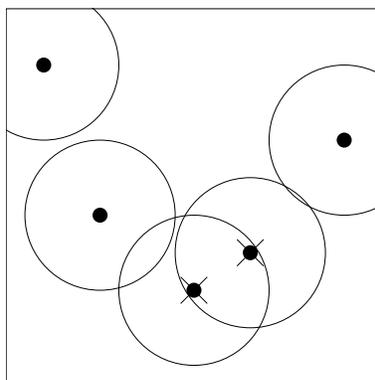


Abbildung 18: Punkte, aus deren Sicht die Eigenschaft $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o,r) \setminus \{o\}) = 0\}$ vorliegt

4.1.2 Lokale Charakterisierung

- Die praktische Bestimmung der Palmischen Wahrscheinlichkeit $P_N^0(A)$ mit Hilfe von Formel (8) kann mit einem großen Rechenaufwand verbunden sein, weil die Berechnung der Anzahl $N_{[-n,n]^d,A}$ für großes n in vielen Fällen sehr aufwendig ist.
- Für einige Klassen von stationären Punktprozessen ist es jedoch möglich, die Palmischen Wahrscheinlichkeiten $P_N^0(A)$ auf eine andere (effizientere) Weise zu bestimmen,
 - wobei anstelle der aufwendigen Berechnung der „globalen“ Anzahlen $N_{[-n,n]^d,A}$ nur „lokale“ Modellkenngrößen bestimmt werden müssen, deren praktische Berechnung wesentlich einfacher ist.
 - Dies kann insbesondere bei der Bestimmung von $P_N^0(A)$ mittels Monte-Carlo-Simulation zu einer wesentlichen Verringerung von Rechenzeiten führen.
- Wir beginnen deshalb diesen Abschnitt mit der folgenden „lokalen Charakterisierung“ der Intensität λ ,
 - die in der Literatur der *Satz von Korolyuk* genannt wird
 - und die ein Hilfsmittel zur Herleitung der oben genannten lokalen Charakterisierung der Palmischen Wahrscheinlichkeiten $P_N^0(A)$ ist, vgl. Korollar 4.1.

Theorem 4.4 Sei $B_k = [-1/k, 1/k]^d$ für jedes $k \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \lambda. \quad (9)$$

Beweis

- Wir zeigen zuerst, dass der Grenzwert in (9) existiert, wobei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \sup_{k \geq 1} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \quad (= \rho). \quad (10)$$

- Das Supremum ρ in (10) ist eine positive endliche Zahl, weil für jedes $k \geq 1$

$$0 < \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \leq \frac{\mathbb{E} N(B_k)}{\nu_d(B_k)} = \lambda < \infty.$$

- Wir führen einen indirekten Beweis von (10) und nehmen an, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine unbegrenzt wachsende Folge i_1, i_2, \dots natürlicher Zahlen gibt, so dass

$$\frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{\nu_d(B_{i_n})} \leq (1 - \varepsilon)^{2d} \rho \quad \forall n \geq 1. \quad (11)$$

- Für jedes $k \geq 1$ gibt es ein hinreichend großes $n \geq 1$, so dass sich die Zahl k^{-1} in der Form

$$k^{-1} = k_n i_n^{-1} + \delta_n \quad (12)$$

darstellen lässt, wobei $0 \leq \delta_n < i_n^{-1}$ und $k_n \geq 0$ eine nichtnegative ganze Zahl ist mit

$$\frac{k_n + 1}{k_n} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad (13)$$

- Außerdem lässt sich der Quader B_k dann als Teilmenge der Vereinigung von $(k_n + 1)^d$ Quadern mit der Kantenlänge $2/i_n$ darstellen.
- Insgesamt ergibt sich dann aus (11) – (13) mit Hilfe der Subadditivität von P_N und der Stationarität von $\{N_B\}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} &\leq \frac{(k_n + 1)^d P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{(2/k)^d} \\ &\leq \frac{(k_n + 1)^d P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{(2k_n/i_n)^d} \\ &= \frac{(k_n + 1)^d}{k_n^d} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{i_n}) > 0)}{\nu_d(B_{i_n})} \\ &\leq (1 - \varepsilon)^d \rho. \end{aligned}$$

- Hieraus folgt, dass

$$\sup_{k \geq 1} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} \leq (1 - \varepsilon)^d \rho.$$

- Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition des Supremums ρ in (10), womit die Gültigkeit von (10) bewiesen ist.

- Um die Gültigkeit von (9) zu zeigen, zerlegen wir den Quader $[-1, 1]^d$ für jedes $k \geq 1$ in k^d gleichgroße Quader B_{k1}, \dots, B_{kk^d} mit der Kantenlänge $2/k$.
 - Für beliebige $k \geq 1$ und $i \in \{1, \dots, k^d\}$ sei

$$X_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } N_{B_{ki}} > 0, \\ 0, & \text{wenn } N_{B_{ki}} = 0. \end{cases}$$

– Für $k = 2^1, 2^2, \dots$ gilt dann mit Wahrscheinlichkeit 1 die monotone Konvergenz

$$\sum_{i=1}^{k^d} X_{ki} \uparrow N_{[-1,1]^d}.$$

– Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe des Satzes über die monotone Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} 2^d \lambda &= \mathbb{E} N_{[-1,1]^d} = \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^{nd}} X_{2^n i} \right) \\ &\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{2^{nd}} X_{2^n i} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^{nd}} \mathbb{E} X_{2^n i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nd} P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_{2^n 1}) > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{nd} P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi([-1/2^d, 1/2^d]^d) > 0). \end{aligned}$$

– Insgesamt ergibt sich somit, dass

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi([-1/2^d, 1/2^d]^d) > 0)}{(2/2^n)^d}.$$

– Wegen (10) ist damit die Gültigkeit von (9) bewiesen. \square

Beachte

- Die Aussage von Theorem 4.4 gilt nicht nur für Quader $B_k = [-1/k, 1/k]^d$, sondern auch für allgemeinere Folgen $\{B_k\}$ von immer kleiner werdenden Umgebungen des Nullpunktes.
- Um dies zu zeigen, sind jedoch andere (anspruchsvollere) Beweistechniken erforderlich, vgl. z.B. Abschnitt 12.4 in O. Kallenberg (1986) Random Measures, Academic Press, London.
- Für Spezialfälle kann man dies allerdings auf einfache Weise zeigen.
 - Sei $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ .
 - Dann gilt

$$P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B) > 0) = \lambda \nu_d(B) \exp(-\lambda \nu_d(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

– Somit gilt für jede Folge $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(B_k) < \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_d(B_k) = 0$, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\nu_d(B_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda \nu_d(B_k) \exp(-\lambda \nu_d(B_k))}{\nu_d(B_k)} = \lambda.$$

Mit Hilfe von Theorem 4.4 können wir nun zeigen, dass sich die Palmische Verteilung P_N^0 als Grenzwert von bedingten Verteilungen von $\{N_B\}$ darstellen lässt (unter der Bedingung, dass in einer immer kleiner werdenden Umgebung des Nullpunktes ein Atom des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ liegt).

Hierfür benötigen wir die folgende *Metrik*, die den so genannten Variationsabstand zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen beschreibt.

Definition

- Seien Q_1, Q_2 endliche (nicht notwendig normierte) Maße über \mathcal{N} . Der *Variationsabstand* $\|Q_1 - Q_2\|$ zwischen Q_1 und Q_2 ist gegeben durch

$$\|Q_1 - Q_2\| = \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{A \in \mathcal{Z}} |Q_1(A) - Q_2(A)|, \quad (14)$$

- wobei sich das Supremum in (14) über alle Zerlegungen \mathcal{Z} der Menge \mathbb{N} in endlich viele, paarweise disjunkte Teilmengen aus \mathcal{N} erstreckt.
- Beachte: Es gilt

$$\|Q_1 - Q_2\| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{N}} |Q_1(A) - Q_2(A)|, \quad (15)$$

denn aus der Definitionsgleichung (14) des Variationsabstandes $\|Q_1 - Q_2\|$ ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \|Q_1 - Q_2\| &= \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{A \in \mathcal{Z}} |Q_1(A) - Q_2(A)| \\ &= \sup_{A \in \mathcal{N}: Q_1(A) \geq Q_2(A)} (Q_1(A) - Q_2(A)) + \sup_{A \in \mathcal{N}: Q_1(A) < Q_2(A)} (Q_2(A) - Q_1(A)) \\ &\leq 2 \sup_{A \in \mathcal{N}} |Q_1(A) - Q_2(A)|. \end{aligned}$$

Korollar 4.1 Sei $B_k = [-1/k, 1/k]^d$ für jedes $k \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_N^0 - P_k\| = 0, \quad (16)$$

wobei die (bedingte) Verteilung P_k gegeben ist durch

$$P_k(A) = P_N(\{\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A\} \mid \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0\}) \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (17)$$

und $s^{(k)}(\varphi)$ dasjenige Atom von φ in B_k bezeichnet, das den kleinsten Abstand vom Nullpunkt hat.

Beweis

- Für beliebige $k \geq 1$ und $A \in \mathcal{N}$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} |P_N^0(A) - P_k(A)| &\leq \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} P_k(A) - P_k(A) \right| \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |P_N^0(A) - P_k(A)| &\leq \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| + \left| \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} - 1 \right| \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.4, dass

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} |P_N^0(A) - P_k(A)| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \left| P_N^0(A) - \frac{P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right| \\ &\stackrel{(6)}{\leq} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B_k} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) P_N(d\varphi) \right. \\ &\quad \left. - P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi \in A, \varphi(B_k) > 0) \right|. \end{aligned}$$

- Somit gilt, dass

$$\begin{aligned}
& \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} |P_N^0(A) - P_k(A)| \\
&= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{N}} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\{\varphi': \varphi'(B_k) > 0\}} \left(\sum_{n: s_n(\varphi) \in B_k} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi) - \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s^{(k)}(\varphi)}\varphi) \right) P_N(d\varphi) \right| \\
&\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \nu_d(B_k)} \left| \int_{\{\varphi': \varphi'(B_k) > 0\}} (\varphi(B_k) - 1) P_N(d\varphi) \right| \\
&= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{P_N(\varphi : \varphi(B_k) > 0)}{\lambda \nu_d(B_k)} \right) \stackrel{\text{Theorem 4.4}}{=} 0.
\end{aligned}$$

- Mit Hilfe von (15) ergibt sich hieraus die Behauptung. \square

4.1.3 Reduzierte Palmische Verteilung; Satz von Slivnyak

- Manchmal ist es zweckmässig, neben der in (5) bzw. (6) eingeführten Palmischen Verteilung P_N^0 , noch die so genannte reduzierte Palmische Verteilung von stationären Punktprozessen zu betrachten.
- Dabei wird das Atom gestrichen, das bezüglich P_N^0 mit Wahrscheinlichkeit 1 im Nullpunkt liegt (vgl. Theorem 4.2).
- Mit anderen Worten: Sei $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit $0 < \nu_d(B) < \infty$. Dann heisst das Wahrscheinlichkeitsmass $P_N^1 : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$P_N^1(A) = \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in B} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_{s_n(\varphi)}\varphi - \delta_o) P_N(d\varphi) \quad (18)$$

die *reduzierte Palmische Verteilung* von $\{N_B\}$.

Mit Hilfe von Korollar 4.1 lässt sich die folgende einfache Darstellung der Palmischen Verteilungen P_N^1 und P_N^0 von homogenen Poisson-Prozessen herleiten, die in der Literatur der *Satz von Slivnyak* genannt wird.

Theorem 4.5 *Sei $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess. Dann gilt*

$$P_N^1 = P_N \quad (19)$$

bzw. (äquivalent hierzu)

$$P_N^0 = P_N * \delta_{\delta_o}, \quad (20)$$

wobei $P_N * \delta_{\delta_o}$ die Verteilung des zufälligen Zählmaßes $\{N_B + \delta_o(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ bezeichnet.

Beweis

- Aus Korollar 4.1 ergibt sich insbesondere, dass

$$P_N^0(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(A) \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (21)$$

- Wegen Theorem 2.1 genügt es, den Grenzwert $P_N^0(A)$ in (21) für Ereignisse $A \in \mathcal{N}$ der Form

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(C_1) \leq k_1, \dots, \varphi(C_n) \leq k_n\} \quad (22)$$

zu untersuchen, wobei $n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0$ beliebige natürliche Zahlen sind und $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}^d$ eine beliebige Folge von Quadern ist.

- Dabei setzen wir zunächst zusätzlich voraus, dass der Nullpunkt einen positiven Abstand von jedem der Quader C_1, \dots, C_n hat, d.h.,

$$o \in \text{int}(C_i^c) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

- Aus (21) und aus der Definitionsgleichung (17) von P_k ergibt sich dann, dass

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{P(N_{C_1 \oplus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \oplus B_k} \leq k_n, N_{B_k} > 0)}{P(N_{B_k} > 0)} \\ & \leq P_N^0(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{P(N_{C_1 \ominus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \ominus B_k} \leq k_n, N_{B_k} > 0)}{P(N_{B_k} > 0)}, \end{aligned}$$

wobei $C \oplus B = \{x + y : x \in C, y \in B\}$ die Minkowski-Addition und $C \ominus B = (C^c \oplus B^c)^c$ die Minkowski-Subtraktion bezeichnet.

- Wegen (23) gilt außerdem für jedes hinreichend große k , dass

$$(C_i \ominus B_k) \cap B_k = (C_n \oplus B_k) \cap B_k = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- Aus den Unabhängigkeitseigenschaften der Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich somit, dass

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} P(N_{C_1 \oplus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \oplus B_k} \leq k_n) & \leq P_N^0(A) \\ & \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} P(N_{C_1 \ominus B_k} \leq k_1, \dots, N_{C_n \ominus B_k} \leq k_n) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(C_1) \leq k_1, \dots, \varphi(C_n) \leq k_n) & = P(N_{C_1} \leq k_1, \dots, N_{C_n} \leq k_n) \\ & = P(N_{C_1 + \delta_o(C_1)} \leq k_1, \dots, N_{C_n + \delta_o(C_1)} \leq k_n). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus der Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen bezüglich monotoner Grenzübergänge ergibt sich die Gültigkeit von

$$P_N^0(A) = (P_N * \delta_{\delta_o})(A) \quad (24)$$

für diejenigen der in (22) betrachteten Ereignisse $A \in \mathcal{N}$, so dass der Nullpunkt nicht im Inneren einer der Quader C_1, \dots, C_n liegt, d.h.,

$$o \notin (\text{int } C_1 \cup \dots \cup \text{int } C_n). \quad (25)$$

- Wenn (25) nicht gilt, dann können wir diejenigen Quader C_i mit $o \in \text{int } C_i$ jeweils in zwei Teilquader zerlegen können, so dass danach (25) gilt.
- Hieraus folgt, dass (24) für jedes der in (22) betrachteten Ereignisse $A \in \mathcal{N}$ gilt. \square

Beispiel Sei $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ .

- Dann können wir die in Theorem 4.5 gegebenen Darstellungsformeln (19) und (20) für die Palmische Verteilungen P_N^1 bzw. P_N^0 anwenden, um beispielsweise die *Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion* $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ mit

$$D(r) = P_N^1(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0) \quad \forall r > 0 \quad (26)$$

des typischen Punktes des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ zu bestimmen.

- Hierfür setzen wir in (19) das Ereignis $A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0\}$ für jedes $r > 0$ ein und erhalten, dass

$$D(r) = P_N(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) > 0) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r > 0, \quad (27)$$

wobei κ_d das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

4.1.4 Typische Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken; Simulationsalgorithmus

Ein anderes Anwendungsbeispiel von Theorem 4.5 führt zu der folgenden (lokalen) Darstellung der typischen Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken.

- Hierfür ordnen wir jedem Punkt S_n des Poisson–Prozesses $\{N_B\}$ die *Voronoi–Zelle* Ξ_n zu, wobei

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - S_n| \leq |x - S_m| \forall m \neq n\}, \quad (28)$$

- d.h., Ξ_n ist die (zufällige) Menge derjenigen $x \in \mathbb{R}^d$, deren Abstand von S_n nicht größer ist als die Abstände zwischen x und allen anderen Punkten S_m , $m \neq n$ des Poisson–Prozesses.
- Beachte: Aus der Definitionsgleichung (28) von Ξ_n ergibt sich, dass Ξ_n mit Wahrscheinlichkeit 1 ein beschränktes und konvexes Polygon ist.
- Die Folge $\{\Xi_n\}$ der Voronoi–Zellen Ξ_n wird dann *Poisson–Voronoi–Mosaik* genannt. Dabei sagt man, dass S_n der *Nucleus* von Ξ_n ist.
- Mit Hilfe von Theorem 4.5 erkennen wir nun,
 - dass die Verteilung der sogenannten *typischen Zelle* des Poisson–Voronoi–Mosaiks, d.h., die Verteilung der Zelle des typischen Punktes des Poisson–Prozesses $\{N_B\}$, gegeben ist
 - durch die Verteilung der (zufälligen) Voronoi–Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n| \forall n \geq 1\} \quad (29)$$

des Nullpunktes $o \in \mathbb{R}^d$ bezüglich der Punkte $\{S_n\}$ des homogenen Poisson–Prozesses $\{N_B\}$.

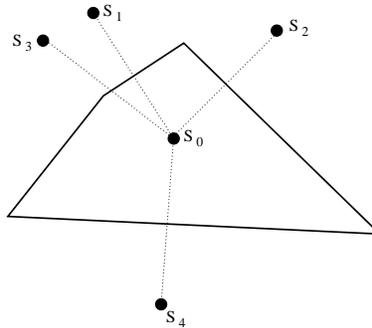


Abbildung 19: Initialzelle

Dies liefert einen effizienten *Algorithmus zur (lokalen) Monte–Carlo–Simulation* der typischen Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken, wobei wir uns hier aus Gründen der Einfachheit auf die Beschreibung des planaren Falles $d = 2$ beschränken.

- Der Algorithmus besteht aus zwei Teilen, wobei jeweils eine gewisse Anzahl von Punkten S_1, S_2, \dots des Poisson–Prozesses $\{N_B\}$ mit dem Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson–Prozessen erzeugt wird, der in Abschnitt 2.2.1 eingeführt worden ist.
- Zunächst werden so viele Punkte S_1, S_2, \dots erzeugt, bis sich durch die Mittelsenkrechten der Strecken (o, S_1) , (o, S_2) , \dots ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt, das *Initialzelle* genannt wird, vgl. Abbildung 19.
 - Die Konstruktion der Initialzelle kann mit Hilfe der folgenden *Stoppregel* erfolgen.
 - Zuerst werden die Punkte S_1, S_2 und S_3 erzeugt. Dabei wird der Sektor Σ_{S_1, S_2} betrachtet, der durch die beiden Geraden $\overline{o, -S_1}$ und $\overline{o, -S_2}$ gebildet wird.

- Wenn $S_3 \in \Sigma_{S_1, S_2}$, dann stoppt der Algorithmus und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken (o, S_1) , (o, S_2) und (o, S_3) gebildet.
 - Wenn $S_3 \notin \Sigma_{S_1, S_2}$, dann wird der größte Sektor Σ_{S_1, S_2, S_3} betrachtet, der durch die Geraden $\overline{o, -S_1}$, $\overline{o, -S_2}$ und $\overline{o, -S_3}$ gebildet werden kann.
 - Anschließend wird der Punkt S_4 erzeugt und geprüft, ob $S_4 \in \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$.
 - Wenn $S_4 \in \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$, dann stoppt der Algorithmus und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken (o, S_1) , (o, S_2) , (o, S_3) und (o, S_4) gebildet.
 - Wenn $S_4 \notin \Sigma_{S_1, S_2, S_3}$, dann wird das Verfahren so lange fortgesetzt, bis $S_{i+1} \in \Sigma_{S_1, \dots, S_i}$,
 - und die Initialzelle wird durch die Mittelsenkrechten der Strecken $(o, S_1), \dots, (o, S_i)$ gebildet.
- Danach wird geprüft, ob die Initialzelle mit der in (29) gegebenen typischen Zelle Ξ^* übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch durch die Erzeugung weiterer Punkte des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ verkleinert werden muss.
 - Sei r_{\max} das Maximum der Abstände der Eckpunkte der Initialzelle vom Nullpunkt.
 - Dann können nur diejenigen Punkte S_n des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ die Gestalt der typischen Zelle Ξ^* beeinflussen, für die $|S_n| \leq 2r_{\max}$ gilt.
 - Die Erzeugung der Punkte S_1, S_2, \dots mit dem Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson-Prozessen kann also spätestens dann gestoppt werden, wenn $|S_n| > 2r_{\max}$.
 - Durch die Mittelsenkrechten der Strecken $(o, S_{i+1}), \dots, (o, S_{i+2}), \dots$ können Teilbereiche der Initialzelle wegfallen,
 - wodurch sich der Maximalabstand r_{\max} der Eckpunkte verringern und der Algorithmus gegebenenfalls früher gestoppt werden kann.

Beachte

- Jeder Durchlauf des oben beschriebenen Algorithmus liefert eine Realisierung ξ^* der typischen Zelle Ξ^* .
- Auf der Grundlage der Realisierungen ξ_1, \dots, ξ_n von Ξ^* , die sich aus einer großen Anzahl n solcher Runs ergeben, können statistische Schätzer konstruiert werden, um (Verteilungs-) Eigenschaften von geometrischen Kenngrößen der typischen Zelle Ξ^* zu bestimmen.
- Beispielsweise können auf diese Weise die Verteilungen der Eckenzahl, der Randlänge bzw. des Flächeninhaltes von Ξ^* bestimmt werden.

4.2 Campbellsche Maße; Beispiele von Palmischen Verteilungen

4.2.1 Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes von Poisson-Prozessen

Wir verallgemeinern nun den Satz von Slivnyak, d.h., die in Theorem 4.5 hergeleitete Formel (19) zur Darstellung der reduzierten Palmischen Verteilung $P_N^!$.

Dabei betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst den Fall von beliebigen (inhomogenen) Poisson-Prozessen $\{N_B\}$. Hierfür ist der Begriff des Campbellschen Maßes bzw. des reduzierten Campbellschen Maßes von zufälligen Zählmaßen nützlich.

Definition Sei $\{N_B\}$ ein beliebiges zufälliges Zählmaß mit der Verteilung P_N über \mathcal{N} .

- Dann heißt das Maß $\gamma : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\gamma(A \times B) = \int_{\mathcal{N}} \varphi(B) \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (30)$$

das *Campbellsche Maß* von $\{N_B\}$.

- Außerdem wird das Maß $\gamma^! : \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\gamma^!(A \times B) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_A(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (31)$$

betrachtet, das das *reduzierte Campbellsche Maß* von $\{N_B\}$ genannt wird.

Beachte Mit algebraischer Induktion kann man zeigen, dass die Definitionsgleichungen (30) und (31) von γ bzw. $\gamma^!$ äquivalent sind mit

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma(d(\varphi, x)) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (32)$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x)) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (33)$$

für jede $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$.

Das folgende Resultat kann als eine Verallgemeinerung der Darstellungsformel (19) aufgefasst werden, die in Theorem 4.5 für den Fall homogener Poisson-Prozesse hergeleitet wurde.

Theorem 4.6 Sei $\{N_B\}$ ein beliebiger Poisson-Prozess mit dem (diffusen und lokal endlichen) Intensitätsmaß μ . Dann gilt

$$\gamma^! = P_N \times \mu. \quad (34)$$

Beweis Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte.

- 1) Zunächst zeigen wir, dass die Produktformel

$$\gamma^!(A \times B) = P_N(A) \mu(B) \quad (35)$$

für jede beschränkte Borel-Menge $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und für jedes $A \in \mathcal{N}$ der folgenden Gestalt gilt:

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B') = j\}, \quad \text{wobei } B' \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), j \in \{0, 1, \dots\}.$$

- Hierfür genügt es, die Gültigkeit von (35) für die Fälle

$$1a) \quad B \subset B' \quad \text{und} \quad 1b) \quad B \cap B' = \emptyset$$

zu zeigen, weil jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ in der Form $B = (B \cap B') \cup (B \setminus B')$ dargestellt werden kann und weil dann

$$\begin{aligned} \gamma^!(A \times B) &= \gamma^!(A \times ((B \cap B') \cup (B \setminus B'))) \\ &= \gamma^!(A \times (B \cap B')) + \gamma^!(A \times (B \setminus B')) \\ &= P_N(A) \mu(B \cap B') + P_N(A) \mu(B \setminus B') \\ &= P_N(A) \mu(B). \end{aligned}$$

- Im Fall 1a) ergibt sich aus der Definitionsgleichung (31) des reduzierten Campbellschen Maßes $\gamma^!$, dass

$$\begin{aligned} \gamma^!(A \times B) &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_A(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi - \delta_x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k + 1, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^j \int_{\mathbb{N}} (k + 1) \mathbf{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B) = k + 1, \varphi'(B' \setminus B) = j - k\}}(\varphi) P_N(d\varphi). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus den Unabhängigkeits- bzw. Verteilungseigenschaften des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
\gamma^1(A \times B) &= \sum_{k=0}^j (k+1) P(N(B) = k+1) P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j \frac{\mu^k(B)}{k!} e^{-\mu(B)} P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j P(N(B) = k) P(N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= \mu(B) \sum_{k=0}^j P(N(B) = k, N(B' \setminus B) = j-k) \\
&= P(N(B') = j) \mu(B) = P_N(A) \mu(B).
\end{aligned}$$

- Im Fall 1b) ergibt sich auf ähnliche Weise aus (31), dass

$$\begin{aligned}
\gamma^1(A \times B) &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) P_N(d\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) P_N(d\varphi) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N}: \varphi'(B')=j\}}(\varphi) P_N(d\varphi) \\
&= P_N(A) \mu(B).
\end{aligned}$$

2) Wir zeigen nun die Gültigkeit von (35) für Mengen $A \in \mathcal{N}$ der Gestalt

$$A = \{\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B_1) = j_1, \dots, \varphi(B_n) = j_n\}, \quad (36)$$

wobei $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1, \dots\}$.

- Hierfür genügt es (ähnlich wie im ersten Beweisschritt) zu beachten, dass wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, dass die Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ paarweise disjunkt sind und dass einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

$$2a) \quad B \subset B_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{oder} \quad 2b) \quad B \cap \bigcup_{i=1}^n B_i = \emptyset.$$

- Im Fall 2a) können wir dann genauso wie in Beweisschritt 1a) vorgehen, um die Gültigkeit von (35) zu zeigen. Im Fall 2b) verläuft der Beweis so wie in Schritt 1b).
- 3) Aus der Gültigkeit von (35) für Mengen $A \in \mathcal{N}$ der Gestalt (36) ergibt sich wegen der σ -Additivität der Maße γ^1 und P_N , dass (35) auch für sämtliche Mengen $A \in \mathcal{R} \subset \mathcal{N}$ gilt, wobei

$$\mathcal{R} = \left\{ \{\varphi \in \mathbb{N} : k_i \leq \varphi(B_i) < \ell_i, i = 1, \dots, n\}, n \geq 1, B_i \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), k_i, \ell_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\} \right\}. \quad (37)$$

- 4) Weil \mathcal{R} ein Halbring ist, der die σ -Algebra \mathcal{N} erzeugt, ergibt sich mit Hilfe des Satzes über monotone Klassen (vgl. Lemma 3.5), dass (35) für jedes $A \in \mathcal{N}$ gilt.
- 5) Durch die erneute Anwendung des Satzes über monotone Klassen ergibt sich nun, dass

$$\gamma^1(C) = (P_N \times \mu)(C)$$

für jedes $C \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. □

Beachte

- Wenn $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ ist, dann ergibt sich aus der in Theorem 4.6 hergeleiteten Produktformel (34), dass

$$\gamma^!(A \times B) = \lambda P_N(A) \nu_d(B) \quad \forall A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (38)$$

- Außerdem ergibt sich mit Hilfe der Definitionsgleichungen (18) und (33) von $P_N^!$ bzw. $\gamma^!$, dass für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(18)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x(\varphi - \delta_x)) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x)) \end{aligned}$$

wobei $f(\varphi, x) = \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi)$.

- Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe von (38), dass für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(38)}{=} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) dx P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) P_N(d\varphi) dx \\ &\stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_A(\varphi) P_N(d\varphi) dx \\ &= P_N(A). \end{aligned}$$

- Dies bedeutet, dass

$$P_N^! = P_N, \quad (39)$$

was mit einer anderen Beweistechnik bereits in Theorem 4.5 gezeigt worden ist.

4.2.2 Palmische Verteilung von zufälligen Maßen; Cox-Prozesse

Die Formel (39) zur Darstellung der reduzierten Palmischen Verteilung $P_N^!$ von homogenen Poisson-Prozessen lässt sich als Spezialfall allgemeinerer Darstellungsformeln für die reduzierte Palmische Verteilung von stationären Cox-Prozessen bzw. von stationären Poissonschen Cluster-Prozessen auffassen.

Wir betrachten zunächst eine Verallgemeinerung der Formel (39) für stationäre Cox-Prozesse. Hierfür benötigen wir den Begriff der Palmischen Verteilung von stationären (Intensitäts-) Maßen.

Definition

- Sei $\{\Lambda_B\}$ ein stationäres zufälliges Maß, beispielsweise das zufällige Intensitätsmaß eines stationären Cox-Prozesses.
- Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\Lambda^0 : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad (40)$$

heißt die *Palmische Verteilung* des stationären zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$,

- wobei $\lambda = \mathbb{E} \Lambda([0, 1]^d)$ und $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1. \quad (41)$$

Beachte

- Man kann sich leicht überlegen, dass das in (40) gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß P_Λ^0 nicht von der Wahl der Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ abhängt.
- Insbesondere kann $g(x) = \mathbb{1}_B(x)/\nu_d(B)$ gesetzt werden für jede beschränkte Borel-Menge $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(B) < \infty$.
- Dann wird klar, dass (40) eine Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (6) für die Palmische Verteilung von stationären Zählmaßen ist.
- Mit algebraischer Induktion kann man zeigen, dass die Definitionsgleichung (40) der Palmischen Verteilung P_Λ^0 des stationären zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$ äquivalent ist mit

$$\int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\eta, x) dx P_\Lambda^0(d\eta) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_x \eta, x) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \quad (42)$$

für jede $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $f : \mathbb{M} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$.

Ein wichtiger Spezialfall liegt dann vor,

- wenn die Realisierungen des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, d.h.,
- wenn es ein zufälliges Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ gibt, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, so dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (43)$$

- Eine Klasse von Beispielen hierfür liefern die zufälligen Intensitätsmaße von modulierten Poisson-Prozessen, vgl. Abschnitt 3.2.3.

Für stationäre zufällige Maße $\{\Lambda_B\}$ mit absolutstetigen Realisierungen lässt sich die Definitionsgleichung (40) der Palmischen Verteilung P_Λ^0 wie folgt vereinfachen.

Theorem 4.7 *Sei $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ ein stationäres zufälliges Feld, dessen Realisierungen Borel-messbare und lokal-integrierbare nichtnegative Funktionen sind, und das stationäre zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ sei durch (43) gegeben. Dann gilt*

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} (\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \lambda_o) \quad \forall A \in \mathcal{M}. \quad (44)$$

Beweis

- Für die in (40) betrachtete Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ setzen wir $g(x) = \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.
- Wegen (43) lässt sich dann die rechte Seite von (40) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d\eta}{dx}(x) dx P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d(\mathbf{T}_x \eta)}{dx}(o) dx P_\Lambda(d\eta). \end{aligned}$$

- Hieraus ergibt sich durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge, dass für jedes $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \int_{[0,1]^d} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{I}_A(\mathbf{T}_x \eta) \frac{d(\mathbf{T}_x \eta)}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) dx \\
&\stackrel{\text{Stationarität von } \{\Lambda_B\}}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{[0,1]^d} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{I}_A(\eta) \frac{d\eta}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{I}_A(\eta) \frac{d\eta}{dx} (o) P_\Lambda(d\eta) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\lambda_o). \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel

- Wir betrachten das Intensitätsfeld von modulierten Poisson-Prozessen, vgl. Abschnitt 3.2.3.
- D.h., das zufällige Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$ sei gegeben durch den Ansatz

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi, \end{cases} \quad (45)$$

- wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ beliebige Zahlen mit $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$ sind,
- die (zufällige) Menge Ξ gegeben ist durch $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$,
- und $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität $\lambda_0 \in (0, \infty)$ ist.

- Dann ergibt sich aus (44) und (45), dass

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \quad \forall A \in \mathcal{M}. \quad (46)$$

- Denn für jedes $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\begin{aligned}
P_\Lambda^0(A) &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\lambda_o) \\
&= \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 \mathbb{E} \mathbb{I}_\Xi(o) + \lambda_2 \mathbb{E} \mathbb{I}_{\Xi^c}(o)} \\
&= \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_\Xi(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{I}_A(\{\Lambda_B\})\mathbb{I}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Formel (3.66) in Lemma 3.3 ergibt und κ_d das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Wir leiten nun eine Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) für die reduzierte Palmische Verteilung von stationären Cox-Prozessen her.

Theorem 4.8 *Sei $\{N_B\}$ ein stationärer Cox-Prozess mit dem (stationären) zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$. Dann ist die reduzierte Palmische Verteilung $P_N^1 : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ von $\{N_B\}$ gegeben durch*

$$P_N^1(A) = \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (47)$$

wobei $Q_\eta : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ die Verteilung eines Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß η bezeichnet.

Beweis

- Die Definitionsgleichungen (3.24) bzw. (3.25) des Cox–Prozesses $\{N_B\}$ sind äquivalent mit

$$P_N(A) = \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall A \in \mathcal{N}. \quad (48)$$

- Hieraus und aus der Definitionsgleichung (18) von $P_N^!$ ergibt sich, dass für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(18)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x\varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &\stackrel{(48)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x\varphi - \delta_o) \varphi(dx) Q_\eta(d\varphi) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x(\varphi - \delta_x)) \varphi(dx) Q_\eta(d\varphi) P_\Lambda(d\eta) \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x\varphi) \gamma_\eta^!(d(\varphi, x)) P_\Lambda(d\eta), \end{aligned}$$

wobei $\gamma_\eta^!$ das reduzierte Campbellsche Maß eines (im allgemeinen inhomogenen) Poisson–Prozesses mit dem Intensitätsmaß η bezeichnet.

- Aus der Darstellungsformel (34) für das reduzierte Campbellsche Maß $\gamma_\eta^!$, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} P_N^!(A) &\stackrel{(34)}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_A(\mathbf{T}_x\varphi) Q_\eta(d\varphi) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) Q_\eta(\mathbf{T}_{-x}A) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) Q_{\mathbf{T}_x\eta}(A) \eta(dx) P_\Lambda(d\eta) \\ &\stackrel{(42)}{=} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(d\eta), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (42) der Palmischen Verteilung P_Λ^0 von $\{\Lambda_B\}$ ergibt. \square

Beachte Aus der in Theorem 4.8 hergeleiteten Darstellungsformel (47) ergibt sich insbesondere,

- dass die reduzierte Palmische Verteilung $P_N^!$ des stationären Cox–Prozesses $\{N_B\}$ erneut die Verteilung eines Cox–Prozesses ist,
- wobei die Verteilung des zugehörigen zufälligen Intensitätsmaßes durch die Palmische Verteilung P_Λ^0 von $\{\Lambda_B\}$ gegeben ist.

4.2.3 Beispiele: modulierte Poisson–Prozesse, Cox–Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen

1. Modulierte Poisson–Prozesse

- Wir betrachten das stationäre zufällige Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$, wobei λ_x in (45) gegeben ist, und das stationäre zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ mit $\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Dann ist die Palmische Verteilung P_Λ^0 von $\{\Lambda_B\}$ durch (46) gegeben, d.h.,

$$P_\Lambda^0(A) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \mathbb{1}_{\Xi}(o)) + \lambda_2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(\{\Lambda_B\}) \mathbb{1}_{\Xi^c}(o))}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

- Hieraus und aus Theorem 4.8 folgt, dass die reduzierte Palmische Verteilung P_N^1 des stationären Cox-Prozesses $\{N_B\}$ mit dem Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ gegeben ist durch

$$P_N^1(A) = p_c \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \in \Xi}(\mathrm{d}\eta) + (1 - p_c) \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \notin \Xi}(\mathrm{d}\eta), \quad (49)$$

wobei

$$p_c = \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d))}{\lambda}, \quad \lambda = \lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d) \quad (50)$$

und

$$P_{\Lambda|o \in \Xi}(A) = P(\{\Lambda_B\} \in A \mid o \in \Xi), \quad P_{\Lambda|o \notin \Xi}(A) = P(\{\Lambda_B\} \in A \mid o \notin \Xi) \quad (51)$$

- Denn aus (46) und (47) ergibt sich, dass für jedes $A \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} P_N^1(A) &\stackrel{(47)}{=} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_\Lambda^0(\mathrm{d}\eta) \\ &\stackrel{(46)}{=} \frac{\lambda_1 \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) \mathbb{E}(\{\Lambda_B\} \in \mathrm{d}\eta, o \in \Xi) + \lambda_2 \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) \mathbb{E}(\{\Lambda_B\} \in \mathrm{d}\eta, o \notin \Xi)}{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)) + \lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)} \\ &= \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d))}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \in \Xi}(\mathrm{d}\eta) \\ &\quad + \frac{\lambda_2 \exp(-\lambda_0 \kappa_d r^d)}{\lambda} \int_{\mathbb{M}} Q_\eta(A) P_{\Lambda|o \notin \Xi}(\mathrm{d}\eta). \end{aligned}$$

- Beachte: Die in (50) eingeführte Größe p_c kann als

– *bedingte Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Nullpunktes durch die zufällige Menge

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$$

aufgefasst werden, und zwar unter der Bedingung, dass in einer infinitesimal kleinen Umgebung des Nullpunktes ein Punkt von $\{N_B\}$ liegt.

- Dies ergibt sich aus der Definitionsgleichung (6) der Palmischen Verteilung P_N^0 des modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ mit Hilfe der lokalen Charakterisierung Palmischer Wahrscheinlichkeiten, die in Abschnitt 4.1.2 diskutiert worden ist.
- Dabei ist die in (50) betrachtete Größe λ die Intensität des modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$.

2. Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen; Poissonsche Geradenmosaik

- Sei $\lambda_\ell > 0$ eine beliebige positive Zahl. Wir führen zunächst den Begriff des homogenen (und isotropen) Poissonschen Geradenprozesses im \mathbb{R}^2 mit der Intensität λ_ℓ ein.

– Hierfür betrachten wir den unabhängig markierten Poisson-Prozess $\{(R_n, V_n)\}$, wobei

- $\{R_n, n \geq 1\}$ ein homogener Poisson-Prozess in \mathbb{R} mit der Intensität λ_ℓ ist,
- $\{V_n\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (nichtnegativen) Zufallsvariablen ist mit $V_n \sim U([0, \pi))$,
- und die beiden Folgen $\{R_n\}$ und $\{V_n\}$ unabhängig sind.

– Für jedes $n \geq 1$ betrachten wir die (zufällige) Gerade ℓ_{R_n, V_n} in \mathbb{R}^2 mit

$$\ell_{R_n, V_n} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos V_n + x_2 \sin V_n = R_n\}.$$

- Dann sagt man, dass die (zufällige) Menge $X_\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}$ ein *Poissonscher Geradenprozess* im \mathbb{R}^2 mit der *Intensität* λ_ℓ ist.

- Beachte:

- Man kann zeigen, dass

$$\lambda_\ell = \mathbb{E} \nu_1(X_\ell \cap B) \quad (52)$$

für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mit $\nu_2(B) = 1$ gilt, wobei $\nu_1(X_\ell \cap B)$ die Gesamtstreckenlänge von X_ℓ in der Borel-Menge B bezeichnet, d.h., λ_ℓ ist die erwartete Gesamtstreckenlänge von X_ℓ pro Flächeneinheit,

- und dass durch den Poissonschen Geradenprozess X_ℓ eine Folge $\{\Xi_n, n \geq 1\}$ von (zufälligen) kompakten und konvexen Polygonen induziert wird, so dass

- (i) $\text{int } \Xi_i \cap \text{int } \Xi_j = \emptyset$ für beliebige $i, j \geq 1$ mit $i \neq j$,

- (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n = \mathbb{R}^2$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Xi_n = X_\ell$,

- Beachte: Aus den Eigenschaften (i) und (ii) ergibt sich insbesondere, dass $[x, x'] \cap X_\ell = \emptyset$ für beliebige $x, x' \in \text{int } \Xi_n$ und $n \geq 1$.

- Dabei sagt man, dass $\{\Xi_n, n \geq 1\}$ ein (stationäres und isotropes) *Poissonsches Geradenmosaik* mit der *Intensität* λ_ℓ ist. Die zufälligen Polygone Ξ_1, Ξ_2, \dots werden die *Zellen* des Mosaiks genannt, vgl. Abbildung 20.

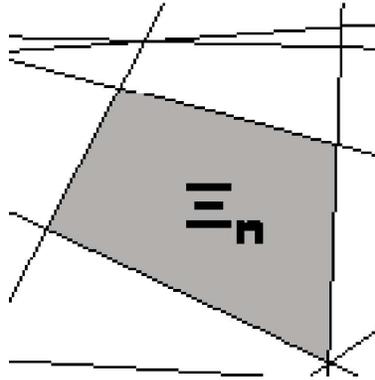


Abbildung 20: Zelle eines Poissonschen Geradenmosaiks

- Sei $\lambda^{(1)} > 0$ eine beliebige positive Zahl, und das stationäre zufällige Maß $\{\Lambda_B\}$ sei gegeben durch

$$\Lambda_B = \lambda^{(1)} \nu_1(X_\ell \cap B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \quad (53)$$

- Eine Realisierung eines Cox-Prozesses mit dem in (53) betrachteten zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ ist in Abbildung 21 gegeben.

- Ähnlich wie beim Beweis des Satzes von Slivniak (vgl. die Beweise der Theoreme 4.5 bzw. 4.8) ergibt sich

- (i) aus den Unabhängigkeitseigenschaften des Poisson-Prozesses $\{(R_n, V_n)\}$, der den Poissonschen Geradenprozess $X_\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{R_n, V_n}$ generiert,

- (ii) und aus der Definitionsgleichung (40) der Palmischen Verteilung P_Λ^0 des stationären zufälligen Maßes $\{\Lambda_B\}$,

- dass die Palmische Verteilung P_Λ^0 gegeben ist durch

$$P_\Lambda^0(A) = P(\{\Lambda_B^0\} \in A) \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad (54)$$

wobei

$$\Lambda_B^0 = \lambda^{(1)} \nu_1((\ell_{o, V_0} \cup X_\ell) \cap B) \quad (55)$$

und $V_0 : \Omega \rightarrow [0, \pi)$ eine nichtnegative Zufallsvariable mit $V_0 \sim U([0, \pi))$ ist, die von $\{(R_n, V_n)\}$ unabhängig ist.

- Beachte: Die in (54) und (55) gegebene Palmische Verteilung P_Λ^0 von $\{\Lambda_B\}$ ist die Verteilung des zufälligen Maßes $\{\Lambda_B^0\}$, dass sich ergibt, indem

- nicht nur die Gesamtstreckenlänge Λ_B des Poissonschen Geradenprozesses X_ℓ in B ,
- sondern außerdem noch die Länge der Schnittmenge $\ell_{o, V_0} \cap B$ betrachtet wird, die durch die zusätzlich hinzugefügte (und durch den Nullpunkt verlaufende) Gerade ℓ_{o, V_0} entsteht.
- Hieraus und aus Theorem 4.8 folgt,
 - dass die reduzierte Palmische Verteilung $P_N^!$ des stationären Cox-Prozesses $\{N_B\}$ mit dem Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ gegeben ist
 - durch die Verteilung der Vereinigungsmenge der Atome der (linearen) homogenen Poisson-Prozesse mit der Intensität $\lambda^{(1)}$, die auf den Geraden des Geradenprozesses $\ell_{o, V_0} \cup X_\ell$ liegen.

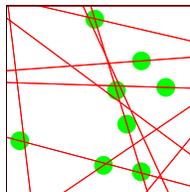


Abbildung 21: Cox-Prozess auf Poissonschem Geradensystem

4.2.4 Typische Zelle von Cox-Voronoi-Mosaiken; Simulationsalgorithmen

In diesem Abschnitt betrachten wir Voronoi-Mosaiken, die durch Cox-Prozesse generiert werden, und sprechen deshalb von *Cox-Voronoi-Mosaiken*. Insbesondere betrachten wir Cox-Voronoi-Mosaiken, die durch modulierte Poisson-Prozesse bzw. durch Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen generiert werden.

1. Modulierte Poisson-Prozesse

- Sei $\{\tilde{S}_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines modulierten Poisson-Prozesses $\{N_B\}$, und sei $\{\Xi_n\}$ das zugehörige Cox-Voronoi-Mosaik, d.h.,

$$\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \tilde{S}_n| \leq |x - \tilde{S}_m| \forall m \neq n\}, \quad (56)$$

wobei man sich leicht überlegen kann, dass die in (56) gegebenen Zellen Ξ_n mit Wahrscheinlichkeit 1 kompakte und konvexe Polygone sind.

- Aus der Darstellungsformel (49) für die reduzierte Palmische Verteilung $P_N^!$ des Cox-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich, dass
 - dass die Verteilung der typischen Zelle des Cox-Voronoi-Mosaiks $\{\Xi_n\}$, d.h., die Verteilung der Zelle des typischen Punktes des Cox-Prozesses $\{N_B\}$, gegeben ist
 - durch die Verteilung der (zufälligen) Voronoi-Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n^!| \forall n \geq 1\} \quad (57)$$

des Nullpunktes $o \in \mathbb{R}^d$ bezüglich der Punkte $\{S_n^!\}$ des Cox-Prozesses $\{N_B^!\}$ mit der in (49)–(51) gegebenen Verteilung $P_N^!$.

Dies führt zu dem folgenden Algorithmus zur Monte–Carlo–Simulation der typischen Zelle Ξ^* des Cox–Voronoi–Mosaiks $\{\Xi_n\}$, der auf der radialen Simulation der Punkte $\{S'_n\}$ des Cox–Prozesses $\{N_B^1\}$ beruht. Dabei beschränken wir uns hier auf die Beschreibung des planaren Falles $d = 2$.

- Wegen der in (49)–(51) gegebenen Darstellung der Verteilung P_N^1 wird zunächst
 - ein Bernoulli–Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p_c durchgeführt,
 - um zwischen den beiden Fällen unterscheiden zu können, ob der Nullpunkt von der zufälligen Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$ überdeckt wird oder nicht,
 - wobei p_c die in (50) gegebene bedingte Überdeckungswahrscheinlichkeit ist und $\{S_n\}$ die radiale Indizierung der Atome eines homogenen Poisson–Prozesses mit der Intensität λ_0 ist.
- Wenn $o \in \Xi$, dann wird die Zufallsvariable $|S_1|$ unter der Bedingung simuliert, dass $|S_1| \leq r$. Ansonsten (d.h., wenn $o \notin \Xi$) wird $|S_1|$ unter der Bedingung simuliert, dass $|S_1| > r$.
 - Hierfür kann der in Abschnitt 2.2.1 dargelegte Algorithmus zur radialen Simulation von homogenen Poisson–Prozessen verwendet werden, zusammen mit dem üblichen Akzeptanz– und Verwerfungsverfahren.
 - D.h., wenn beispielsweise $|S_1|$ unter der Bedingung $|S_1| \leq r$ simuliert werden soll, dann wird eine Realisierung von $|S_1|$ akzeptiert, wenn $|S_1| \leq r$.
 - Ansonsten (d.h., wenn $|S_1| > r$) wird die Realisierung von $|S_1|$ verworfen und eine neue Realisierung von $|S_1|$ generiert, usw.
 - Danach wird der Winkel U_1 mit $U_1 \sim U([0, 2\pi))$ simuliert, wodurch sich der Punkt S_1 mit der Darstellung $S_1 = (|S_1|, U_1)$ in Polarkoordinaten ergibt.
 - Später werden (falls erforderlich) noch die Abstände $|S_2|, |S_3|, \dots$ und die Winkel U_2, U_3, \dots von weiteren Punkten generiert, und zwar so wie dies in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wurde.
- Bei der Simulation der Punkte $\{S'_n\}$ des Cox–Prozesses $\{N_B^1\}$ kann man nun wie folgt vorgehen.
 - Zunächst wird der Punkt S'_1 eines homogenen Poisson–Prozesses $\{S'_n\}$ im \mathbb{R}^2 mit der Intensität $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ generiert, der den kleinsten Abstand vom Nullpunkt hat, wobei wir (o.B.d.A.) annehmen, dass $\lambda_1 > \lambda_2$.
 - (i) Dabei wird geprüft, ob $S'_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)$.
 - (ii) Wenn $S'_1 \in B(S_1, r)$, dann wird S'_1 akzeptiert und $S_1^! = S'_1$ gesetzt.
 - (iii) Ansonsten werden weitere Abstände $|S_2|, |S_3|, \dots, |S_n|$ und Winkel U_2, U_3, \dots, U_n generiert, so lange bis $|S_n| > |S'_1| + r$.
 - (iv) Wenn $S'_1 \in \bigcup_{i=1}^{n-1} B(S_i, r)$, dann wird S'_1 akzeptiert und $S_1^! = S'_1$ gesetzt.
 - (v) Ansonsten, d.h., wenn $S'_1 \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(S_i, r)$, wird ein Bernoulli–Experiment durchgeführt, wobei S'_1 mit der Wahrscheinlichkeit λ_2/λ_1 verworfen wird.
 - Danach wird S'_2 generiert und geprüft, ob $S'_2 \in \bigcup_{i=1}^n B(S_i, r)$.
 - (i) Wenn $S'_2 \in \bigcup_{i=1}^n B(S_i, r)$, dann wird S'_2 akzeptiert.
 - (ii) Ansonsten werden weitere Abstände $|S_{n+1}|, \dots, |S_{n+m}|$ und Winkel U_{n+1}, \dots, U_{n+m} generiert, bis $|S_{n+m}| > |S'_2| + r$.
 - (iii) Wenn $S'_2 \in \bigcup_{i=1}^{n+m-1} B(S_i, r)$, dann wird S'_2 akzeptiert, und wir setzen

$$S_2^! = \begin{cases} S_1^!, & \text{falls } S'_1 \text{ gelöscht wurde,} \\ S'_2, & \text{falls } S'_1 \text{ akzeptiert wurde.} \end{cases}$$
 - (iv) Ansonsten wird erneut ein Bernoulli–Experiment durchgeführt, wobei S'_2 mit der Wahrscheinlichkeit λ_2/λ_1 verworfen wird.
 - Auf die gleiche Weise wird S'_3 generiert und geprüft, ob S'_3 ein Atom des Cox–Prozesses $\{N_B^1\}$ ist, usw.
- Genauso wie bei der Simulation der typischen Zelle von Poisson–Voronoi–Mosaiken wird die folgende *Stoppregel* verwendet; vgl. Abschnitt 4.1.4:

- Die radiale Generierung von Punkten $\{S_n^1\}$ des Cox-Prozesses $\{N_B^1\}$ zunächst so lange fortgesetzt, bis sich durch die Mittelsenkrechten der Strecken $(o, S_1^1), (o, S_2^1), \dots$ ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt, das *Initialzelle* genannt wird.
- Danach wird geprüft, ob die Initialzelle mit der in (57) gegebenen typischen Zelle Ξ^* übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch (so wie in Abschnitt 4.1.4) durch die Erzeugung weiterer Punkte des Cox-Prozesses $\{N_B^1\}$ verkleinert werden muss.

2. Cox-Prozesse auf Poissonschen Geradensystemen

- Sei $\{N_B\}$ ein stationärer Cox-Prozess, dessen zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B\}$ durch (53) gegeben ist, und sei Ξ^* die Voronoi-Zelle

$$\Xi^* = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq |x - S_n^1| \forall n \geq 1\} \quad (58)$$

des Nullpunktes $o \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Punkte $\{S_n^1\}$ des Cox-Prozesses $\{N_B^1\}$, dessen zufälliges Intensitätsmaß $\{\Lambda_B^0\}$ durch (55) gegeben ist.

- Die Darstellungsformel (55) von $\{\Lambda_B^0\}$ führt nun zu dem folgenden Algorithmus zur Simulation der (typischen) Voronoi-Zelle Ξ^* , wobei wir die Tatsache nutzen,
- dass die Verteilung von $\{S_n^1\}$ mit der Verteilung der Vereinigungsmenge der Atome der (linearen) homogenen Poisson-Prozesse mit der Intensität $\lambda^{(1)}$ übereinstimmt, die auf den Geraden des Geradenprozesses $\ell_{o, V_0} \cup X_\ell$ liegen (vgl. Abschnitt 4.2.3).
- So wie bisher besteht der Algorithmus aus zwei Teilen, wobei zuerst die Initialzelle generiert wird.
 - Hierfür wird zunächst eine Realisierung des Winkels $V_0 \sim U([0, \pi))$ generiert.
 - Anschließend wird jeweils eine Realisierung der (unabhängigen) Zufallsvariablen $|S_0^+|$ und $|S_0^-|$ generiert, wobei $|S_0^+|, |S_0^-| \sim \text{Exp}(\lambda^{(1)})$.
 - Damit sind die Punkte $S_0^+ = (|S_0^+|, V_0)$ und $S_0^- = (-|S_0^-|, V_0)$ auf der Geraden $\ell_0 = \ell_{o, V_0}$ gegeben, die dem Nullpunkt am nächsten liegen.
 - Danach wird die Gerade $\ell_1 = \ell_{R_1, V_1}$ generiert und der Schnittpunkt $\ell_0 \cap \ell_1$ bestimmt.
 - Genauso wie S_0^+ und S_0^- werden nun die beiden Punkte S_1^+ und S_1^- auf der Geraden ℓ_1 generiert, die dem Schnittpunkt $\ell_0 \cap \ell_1$ am nächsten liegen.
 - Man kann sich leicht überlegen, dass sich aus den Mittelsenkrechten der Strecken $(o, S_0^+), (o, S_0^-), (o, S_1^+)$ und (o, S_1^-) ein beschränktes (und konvexes) Polygon um den Nullpunkt bilden lässt.
 - D.h., bei Cox-Prozessen auf Poissonschen Geradensystemen werden stets nur *vier* Punkte zur Konstruktion der Initialzelle benötigt.
- Danach wird wiederum geprüft, ob die Initialzelle mit der in (58) gegebenen typischen Zelle Ξ^* übereinstimmt oder ob die Initialzelle noch (so wie in Abschnitt 4.1.4) durch die Erzeugung weiterer Punkte des Cox-Prozesses $\{N_B^1\}$ verkleinert werden muss.

4.2.5 Poissonsche Cluster-Prozesse

In diesem Abschnitt betrachten wir die Palmische Verteilung P_N^0 von stationären Poissonschen Cluster-Prozessen, die in Abschnitt 3.3.1 eingeführt worden sind. Dabei leiten wir eine Darstellungsformel für P_N^0 her, die als eine weitere Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) aufgefasst werden kann.

- Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (59)$$

- wobei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ_0 ist
- und $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen ist, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und deren Intensitätsmaß $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ endlich ist, d.h., $\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) < \infty$.

- Zur Erinnerung:

- Die Intensität λ von $\{N_B\}$ ist gegeben durch $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$, vgl. Theorem 3.14.
- Außerdem ist das erzeugende Funktional $\mathbf{G} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ von $\{N_B\}$ gegeben durch

$$\mathbf{G}(f) = \exp\left(\lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{G}^{[x]}(f) - 1) dx\right) \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (60)$$

- wobei $\mathbf{G}^{[x]} : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ das erzeugende Funktional des (um den Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ verschobenen Sekundär-) Punktprozesses $\{N_{B-x}^{(1)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist, vgl. Korollar 3.3.

- Um eine Darstellungsformel für die Palmische Verteilung P_N^0 von $\{N_B\}$ herleiten zu können, führen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P} : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ ein, wobei

$$\tilde{P}(A) = \frac{1}{\mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(\mathbf{T}_x \varphi) \varphi(dx) P_{N^{(1)}}(d\varphi) \quad \forall A \in \mathcal{N} \quad (61)$$

und $P_{N^{(1)}}$ die Verteilung der Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ bezeichnet.

Das folgende Resultat kann als Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (19) in Theorem 4.5) aufgefasst werden.

Theorem 4.9

- Sei $\{N_B^0\}$ ein zufälliger Punktprozess mit der Palmischen Verteilung P_N^0 , und sei $\{\tilde{N}_B\}$ ein zufälliger Punktprozess mit der in (61) eingeführten Verteilung \tilde{P} , der über dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum wie $\{N_B\}$ gegeben und von $\{N_B\}$ unabhängig ist.
- Dann gilt

$$\{N_B^0, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \stackrel{D}{=} \{N_B + \tilde{N}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}. \quad (62)$$

Beweis

- Es genügt zu zeigen, dass für jede $(\mathcal{N}, \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} g(\varphi) P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'') \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi'). \quad (63)$$

- Für jedes $\varphi \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi(\{x\}) \leq 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$, sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{(\varphi)} : \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch

$$P^{[\varphi]}(A) = P\left(\sum_{n=1}^{\varphi(\mathbb{R}^d)} N_{B-s_n}^{(n)} \in A\right) \quad \forall A \in \mathcal{N}, \quad (64)$$

wobei s_1, s_2, \dots eine messbare Indizierung der Atome von φ ist.

- Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (59) des stationären Poissonschen Cluster-Prozesses $\{N_B\}$, dass für jede $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi', x) \varphi'(dx) P^{[\varphi]}(d\varphi') P_0(d\varphi),$$

wobei P_0 die Verteilung des Poissonschen Primärprozesses $\{S_n\}$ bezeichnet.

- Hieraus und aus der Unabhängigkeit der Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ ergibt sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (33) für das reduzierte Campbellsche Maß $\gamma_{P_0}^1$ des Poissonschen Primärprozesses $\{S_n\}$, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_{s_n}]}(d\varphi'') P^{[\varphi - \delta_{s_n}]}(d\varphi') \right) P_0(d\varphi) \\ &\stackrel{(33)}{=} \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P^{[\varphi - \delta_y]}(d\varphi') \right) \gamma_{P_0}^1(d(\varphi, y)) \\ &\stackrel{\text{Theorem 4.6}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P^{[\varphi]}(d\varphi') \right) P_0(d\varphi) dy, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Produktdarstellung des reduzierten Campbellschen Maßes $\gamma_{P_0}^1$ des (homogenen) Poisson-Prozesses $\{S_n\}$ ergibt, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist.

- Durch die erneute Anwendung der Definitionsgleichung (59) des stationären Poissonschen Cluster-Prozesses $\{N_B\}$ ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \varphi'', x) \varphi''(dx) P^{[\delta_y]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \mathbf{T}_y \varphi'', x - y) \varphi''(dx) P^{[\delta_0]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi' + \mathbf{T}_{x-y} \varphi'', y) \varphi''(dx) P^{[\delta_0]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &\stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \mathbf{T}_x \varphi''), y) \varphi''(dx) P^{[\delta_0]}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy \\ &\stackrel{(61)}{=} \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \varphi''), y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy. \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Definitionsgleichung (61) des Wahrscheinlichkeitsmaßes \tilde{P} ergibt.

- Wegen $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ ergibt sich somit, dass

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(\mathbf{T}_{-y}(\varphi' + \varphi''), y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy. \quad (65)$$

- Andererseits ergibt sich aus der Definitionsgleichung (6) der Palmischen Verteilung P_N^0 von $\{N_B\}$ (vgl. auch die Formel (42)), dass

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_x \varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi)$$

bzw.

$$\lambda \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{T}_{-x} \varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi) \quad (66)$$

für jede $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$.

- Insgesamt ergibt sich somit aus (65) und (66), dass für jede $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\varphi, x) dx P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'', y) \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi') dy$$

bzw. für jede $(\mathcal{N}, \mathcal{B}([0, \infty)))$ -messbare Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} g(\varphi) P_N^0(d\varphi) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} g(\varphi' + \varphi'') \tilde{P}(d\varphi'') P_N(d\varphi'). \quad \square$$

Beachte

- Theorem 4.9 kann als eine Verallgemeinerung des Satzes von Slivnyak (vgl. Formel (20) in Theorem 4.5) aufgefasst werden. Denn in dem Spezialfall, dass $\tilde{P} = \delta_{\delta_o}$, ergibt sich aus Theorem 4.9 insbesondere, dass $P_N^0 = P_N * \delta_{\delta_o}$.
- Weil das Produkt der erzeugenden Funktionale zweier unabhängiger Punktprozesse mit dem erzeugenden Funktional ihrer Summe (im Sinne der Addition zufälliger Zählmaße) übereinstimmt, ergibt sich aus Theorem 4.9 die folgende Darstellungsformel

$$\mathbf{G}^0(f) = \mathbf{G}(f) \tilde{\mathbf{G}}(f) \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (67)$$

für das erzeugende Funktional $\mathbf{G}^0 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ der Palmischen Verteilung P_N^0 , wobei

$$\mathbf{G}^0(f) = \int_{\mathbb{N}} \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \log f(x) \varphi(dx)\right) P_N^0(d\varphi) \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

und \mathbf{G} bzw. $\tilde{\mathbf{G}}$ die erzeugenden Funktionale von P_N bzw. \tilde{P} sind.

- Ähnlich wie für die in Abschnitt 4.2.4 betrachteten Cox–Voronoi–Mosaik lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.9 ein Algorithmus zur Simulation der typischen Zelle von Voronoi–Mosaiken herleiten, die durch stationäre Poissonsche Cluster–Prozesse generiert werden.
 - Dabei muss lediglich vorausgesetzt werden, dass die Verteilung des Sekundärprozesses $\{N_B^{(1)}\}$ und damit auch die in (61) eingeführte Verteilung \tilde{P} eine hinreichende einfache (implementierbare) Gestalt hat.
 - Beispiele, für die dies zutrifft, sind die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten Matérn–Cluster–Prozesse bzw. die in Abschnitt 3.3.3 eingeführten Gauß–Poisson–Prozesse.

4.3 Weitere Kenngrößen von Punktprozessen und ihre Schätzer

- In diesem Abschnitt betrachten wir Kenngrößen von stationären zufälligen Zählmaßen, die zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden können.
- Dabei führen wir zunächst den Begriff der Kontaktverteilungsfunktion ein, die zur Analyse der geometrischen Beschaffenheit der Leerbereiche zwischen den Punkten geeignet ist. Danach betrachten wir Kenngrößen von stationären zufälligen Zählmaße, die sich mit Hilfe ihrer Palmischen Verteilung ausdrücken lassen.
- Insbesondere untersuchen wir Eigenschaften von nichtparametrischen Schätzern dieser Kenngrößen, die die Form von so genannten *Summary-Statistiken* haben.

4.3.1 Kontaktverteilungsfunktion; Minus-Sampling

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein (einfaches) stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$, und sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung seiner Atome. Dabei setzen wir stets voraus, dass $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$.

Definition

- Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir die Zufallsvariable $Z_x : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$Z_x = \min\{r \geq 0 : N_{B(x,r)} > 0\} = \min_{n \geq 1} |x - S_n|, \quad (68)$$

die *sphärischer Kontaktabstand* des Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ zu den Atomen $\{S_n\}$ des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ genannt wird.

- Die Verteilungsfunktion $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ mit $H(r) = P(Z_x \leq r)$ Für jede $r \geq 0$, die wegen der Stationarität des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ nicht von $x \in \mathbb{R}^d$ abhängt, wird die *sphärische Kontaktverteilungsfunktion* von $\{N_B\}$ genannt.

Theorem 4.10 Für beliebige $r \geq 0$ und $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ gilt

$$H(r) = P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \quad (69)$$

und

$$H(r) = \frac{1}{\nu_d(W)} \mathbb{E} \nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right). \quad (70)$$

Beweis

- Die Gültigkeit von (69) ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$\left\{\omega \in \Omega : o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n(\omega), r)\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \min_{n \geq 1} |S_n(\omega)| \leq r\right\} = \{\omega \in \Omega : Z_o(\omega) \leq r\}.$$

- Außerdem ergibt sich aus der Stationarität von $\{N_B\}$ und aus dem Satz von Fubini über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge, dass

$$\begin{aligned} \nu_d(W) P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) &= \int_W P\left(o \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dx \\ &\stackrel{\text{Stationarität von } \{N_B\}}{=} \int_W P\left(x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dx = \int_W \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\}} dx \\ &\stackrel{\text{Satz von Fubini}}{=} \mathbb{E} \int_W \mathbb{1}_{\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\}} dx = \mathbb{E} \nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right). \end{aligned}$$

- Hieraus und aus (69) ergibt sich nun die Gültigkeit von (70). □

Beachte

- Die Darstellungsformel (70) für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ führt zu den folgenden (erwartungstreuen) Schätzern für $H(r)$.

- Sei $r > 0$ und $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit $\nu_d(W \ominus B(o, r)) > 0$, wobei $W \ominus B(o, r) = \{x \in W : B(x, r) \subset W\}$.
- Wenn der Punktprozess $\{S_n\}$ in dem dilatierten Fenster $W \oplus B(o, r)$ beobachtet werden kann (so genanntes Plus-Sampling), wobei $W \oplus B(o, r) = \{x + y : x \in W, y \in B(o, r)\}$, dann folgt aus (70), dass durch den Ansatz

$$\widehat{H}_W^{(1)}(r) = \frac{\nu_d\left(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d(W)} \quad (71)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $H(r)$ gegeben ist.

- Ein weiterer Schätzer für $H(r)$, der auf dem Prinzip des „Minus-Samplings“ beruht und der wegen (70) ebenfalls erwartungstreu für $H(r)$ ist, ist gegeben durch

$$\widehat{H}_W^{(2)}(r) = \frac{\nu_d\left((W \ominus B(o, r)) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d(W \ominus B(o, r))}. \quad (72)$$

- Der in (72) betrachtete Schätzer $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$ besitzt zwar den Vorteil,
 - dass zu seiner Berechnung nur Information über $\{S_n\}$ in dem (ursprünglichen, nicht dilatierten) Beobachtungsfenster W erforderlich ist.
 - Ein Nachteil des Schätzers $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$ besteht allerdings darin, dass $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$ im allgemeinen keine monotone Funktion in r ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass die Schätzer $\widehat{H}_W^{(1)}(r)$ und $\widehat{H}_W^{(2)}(r)$ die folgende (starke) Konsistenzeigenschaft besitzen, wenn der Punktprozess $\{N_B\}$ ergodisch ist.

Theorem 4.11 *Sei $\{N_B\}$ ein ergodischer Punktprozess. Dann gilt für jedes $r > 0$*

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = H(r)\right) = P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = H(r)\right) = 1. \quad (73)$$

Beweis

- Ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.18 kann man sich leicht überlegen, dass für beliebige $k \geq 1$

$$\nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_d\left([-k, k]^d \cap [y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy.$$

- Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy \\ & \leq \nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \leq \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([y, y+1] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) dy \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy = \int_{[-k, k-1]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n - y, r)\right) dy \\ & \leq \nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \leq \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n - y, r)\right) dy \\ & = \int_{[-k-1, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{T}_y S_n = S_n - y$.

- Weil $\{W_k\}$ und $\{W'_k\}$ mit $W_k = [-k, k-1]^d$ bzw. $W'_k = [-k-1, k]^d$ mittelnde Folgen sind und weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-k, k-1]^d)}{\nu_d([-k, k]^d)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d([-k-1, k]^d)}{\nu_d([-k, k]^d)} = 1,$$

ergibt sich nun mit Hilfe von Theorem 3.17, dass der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu_d\left([-k, k]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right)}{\nu_d([-k, k]^d)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d([-k, k]^d)} \int_{[-k, k]^d} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{T}_y S_n, r)\right) dy \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und konstant ist.

- Weil $\{N_B\}$ ergodisch ist, ergibt sich nun durch die erneute Anwendung von Theorem 3.17, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = \mathbb{E} \nu_d\left([0, 1]^d \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B(S_n, r)\right) \stackrel{(70)}{=} H(r),$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Darstellungsformel (70) für $H(r)$ ergibt, die in Theorem 4.10 hergeleitet wurde.

- Auf die gleiche Weise lässt sich zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = H(r)$ mit Wahrscheinlichkeit 1. \square

Beachte

- Wenn $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus der Darstellungsformel (69) für $H(r)$, dass

$$H(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r \geq 0, \quad (74)$$

wobei $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$ das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

- Außerdem kann man zeigen, dass dann die Schätzer $\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r)$ und $\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r)$ für $k \rightarrow \infty$ asymptotisch normalverteilt sind, d.h., es gilt für $i = 1, 2$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{(2k)^d}{\sigma^2}} \left(\widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(i)}(r) - H(r)\right) \leq x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (75)$$

wobei $\sigma^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k)^d \text{Var} \widehat{H}_{[-k, k]^d}^{(i)}(r)$ die asymptotische Schätzvarianz und $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

4.3.2 Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion; randkorrigiertes Minus-Sampling

Wir führen nun den Begriff der Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion ein, die im ergodischen Fall als die Verteilungsfunktion des Abstandes eines zufällig herausgegriffenen Atoms S_n von $\{N_B\}$ zum nächsten Nachbarn von S_n unter den übrigen Atomen S_m mit $m \neq n$ interpretiert werden kann.

Definition

- Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein (einfaches) stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$, so dass $P(N_{\mathbb{R}^d} = 0) = 0$, und sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$.

- Die Verteilungsfunktion $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ mit

$$D(r) = 1 - P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \quad \forall r \geq 0 \quad (76)$$

wird die *Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion* von $\{N_B\}$ genannt, wobei P_N^0 die Palmsche Verteilung von $\{N_B\}$ ist.

Theorem 4.12 Für beliebige $r \geq 0$ und $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \nu_d(W) < \infty$ gilt

$$D(r) = \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W, \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}. \quad (77)$$

Beweis Aus der Definitionsgleichung (76) der Verteilungsfunktion $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ und aus der Darstellungsformel (6) für die Palmsche Verteilung P_N^0 ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} D(r) &\stackrel{(76)}{=} 1 - P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &\stackrel{(6)}{=} 1 - \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in W} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0\}} (\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n: s_n(\varphi) \in W} \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) > 0\}} (\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{1}_W(s_n(\varphi)) \mathbb{1}_{\{\varphi' \in \mathbb{N} : \varphi'(B(o, r) \setminus \{o\}) > 0\}} (\mathbf{T}_{s_n(\varphi)} \varphi) \right) P_N(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(W)} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W, \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess ist, dann lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.9 noch eine weitere Darstellungsformel für die Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ herleiten.

Theorem 4.13 Sei $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess. Dann gilt

$$D(r) = 1 - (1 - H(r)) (1 - G(r)) \quad \forall r \geq 0, \quad (78)$$

wobei $H : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ die sphärische Kontaktverteilungsfunktion von $\{N_B\}$ ist. Die in (78) betrachtete Verteilungsfunktion $G : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ ist gegeben durch

$$G(r) = P\left(\min_{n: \tilde{S}_n \neq o} |\tilde{S}_n| \leq r\right), \quad (79)$$

wobei $\{\tilde{S}_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome eines zufälligen Zahlmaßes mit der in (61) eingeführten Verteilung \tilde{P} ist.

Beweis Aus der Definitionsgleichung (76) der Verteilungsfunktion $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.9, dass

$$\begin{aligned} 1 - D(r) &\stackrel{(76)}{=} P_N^0(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &\stackrel{\text{Theorem 4.9}}{=} P(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r)) = 0) \tilde{P}(\varphi \in \mathbb{N} : \varphi(B(o, r) \setminus \{o\}) = 0) \\ &= (1 - H(r)) (1 - G(r)). \quad \square \end{aligned}$$

Aus den Theoremen 4.10 und 4.13 ergibt sich sofort das folgende Resultat.

Korollar 4.2

- Wenn $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess ist, dann gilt

$$D(r) \geq H(r) \quad \forall r \geq 0. \quad (80)$$

- Wenn $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess ist, dann gilt insbesondere

$$D(r) = H(r) = 1 - \exp(-\lambda \kappa_d r^d) \quad \forall r \geq 0. \quad (81)$$

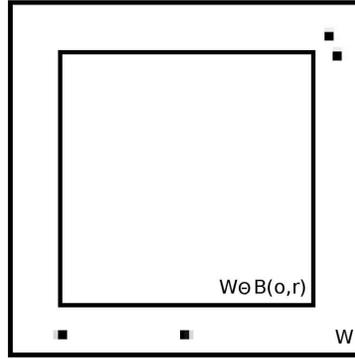


Abbildung 22: Schätzung der Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion

Beachte

- Die Darstellungsformel (77) für die Nächster-Nachbar-Abstandsverteilungsfunktion $D : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ führt zu dem folgenden (erwartungstreuen) Schätzer für $\lambda D(r)$, der auf dem Prinzip des „Minus-Samplings“ beruht.
 - Sei $r > 0$ und $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige beschränkte Borel-Menge mit $\nu_d(W \ominus B(o, r)) > 0$.
 - Dann betrachten wir den Schätzer $\widehat{\lambda D(r)}$, der gegeben ist durch den Ansatz

$$\widehat{\lambda D(r)} = \frac{1}{\nu_d(W \ominus B(o, r))} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W \ominus B(o, r), \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}.$$

- Hieraus ergibt sich der „natürliche“ *Minus-Sampling-Schätzer*

$$\widehat{D}_W^{(1)}(r) = \frac{\widehat{\lambda D(r)}}{\widehat{\lambda(r)}} \quad (82)$$

für $D(r)$, wobei $\widehat{\lambda(r)} = \#\{n : S_n \in W \ominus B(o, r)\} / \nu_d(W \ominus B(o, r))$, d.h.

$$\widehat{D}_W^{(1)}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \in W \ominus B(o, r), \min_{m \neq n} |S_m - S_n| \leq r\}}}{\#\{n : S_n \in W \ominus B(o, r)\}}. \quad (83)$$

- Ein Nachteil des in (82) bzw. (83) eingeführten Schätzers $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$ besteht darin, dass bei diesem Schätzansatz nur diejenige Information genutzt wird, die in dem „erodierten“ Beobachtungsfenster $W \ominus B(o, r)$ enthalten ist, wobei der Erosionsradius r nicht von den Daten abhängt.

- Dies führt bei größeren Werten von r zu unnötig großen Schätzvarianzen.
- Außerdem ist $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$ im allgemeinen keine monotone Funktion in r .
- Ein anderer (randkorrigierter) Schätzer für $D(r)$, der diese Nachteile nicht aufweist, ist durch den folgenden Ansatz gegeben:
 - Für jedes $r > 0$ sei

$$\widehat{D}_W^{(2)}(r) = \frac{\widetilde{\lambda D(r)}}{\widetilde{\lambda}}, \quad (84)$$

wobei

$$\widetilde{\lambda D(r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{S_n \in W \ominus B(o, Z_n), Z_n \leq r\}}}{\nu_d(W \ominus B(o, Z_n))}, \quad \widetilde{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\{S_n \in W \ominus B(o, Z_n)\}}}{\nu_d(W \ominus B(o, Z_n))}, \quad Z_n = \min_{m \neq n, S_m \in W} |S_m - S_n| \quad (85)$$

und $\frac{0}{0} = 0$ gesetzt wird.

- Der in (84) bzw. (85) eingeführte Schätzer $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$ erfasst diejenigen Punkte S_n , die in W liegen und für die bekannt ist, dass ihr nächster Nachbar ebenfalls in W liegt und einen Abstand von S_n hat, der kleiner oder gleich r ist.
- Die Abbildung 22 dient zur Illustration dieses Zählverfahrens: Der Punkt in der rechten oberen Ecke des Beobachtungsfensters W wird bei der Summation in (85) zur Berechnung von $\widetilde{\lambda D(r)}$ berücksichtigt, während die übrigen drei Punkte in W nicht berücksichtigt werden.
- Aus den Definitionsgleichungen (84) und (85) ergibt sich sofort, dass $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$ eine monotone Funktion in r ist.

Aus Theorem 3.17 ergibt sich, dass die in (82) bzw. (84) eingeführten Statistiken $\widehat{D}_W^{(1)}(r)$ und $\widehat{D}_W^{(2)}(r)$ konsistente Schätzer für $D(r)$ sind, wenn der Punktprozess $\{N_B\}$ ergodisch ist.

Theorem 4.14 *Sei $\{N_B\}$ ein ergodischer Punktprozess. Dann gilt für jedes $r > 0$*

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_{[-k, k]^d}^{(1)}(r) = D(r)\right) = P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_{[-k, k]^d}^{(2)}(r) = D(r)\right) = 1. \quad (86)$$

Der Beweis von Theorem 4.14 ist analog zum Beweis von Theorem 4.11 und wird deshalb weggelassen.

Beachte

- Außer der Kontaktverteilungsfunktion $H(r)$ und der Nächster-Abstand-Verteilungsfunktion $D(r)$ kann auch die so genannte J-Funktion $J : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, wobei

$$J(r) = \frac{1 - D(r)}{1 - H(r)} \quad \text{für jedes } r > 0 \text{ mit } H(r) < 1, \quad (87)$$

zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden.

- Denn aus den Formeln (80) und (81) ergibt sich, dass für jedes $r > 0$

$$J(r) \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad J(r) = 1, \quad (88)$$

wenn $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess bzw. ein homogener Poisson-Prozess ist.

- Wenn sich also aus der Analyse der Daten ergibt, dass $\widehat{J}(r) > 1$ für jedes $r > 0$, wobei

$$\widehat{J}(r) = \frac{1 - \widehat{D}(r)}{1 - \widehat{H}(r)}$$

und $\widehat{D}(r)$ bzw. $\widehat{H}(r)$ geeignet gewählte Schätzer für $D(r)$ bzw. $H(r)$ sind, dann könnte ein Poissonscher Cluster-Prozess ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Daten sein.

4.3.3 Höhere Momentenmaße

In diesem Abschnitt betrachten wir höhere Momentenmaße von zufälligen Zählmaßen. Von besonderem Interesse ist das so genannte faktorielle Momentenmaß zweiter Ordnung.

Es bildet die Grundlage zur Definition der Ripleyschen K-Funktion und der Paarkorrelationsfunktion von stationären und isotropen Punktprozessen, die ebenfalls zur statistischen Analyse der Struktureigenschaften von unregelmäßigen Punktmustern genutzt werden können; vgl. die Abschnitte 4.3.4 und 4.3.5.

- Sei $m \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl, und sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß im \mathbb{R}^d , das einfach ist (d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 keine Mehrfachpunkte besitzt) und der Integrierbarkeitsbedingung $\mathbb{E}(N_B^m) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ genügt.
- Zur Erinnerung: Das in (3.4) eingeführte Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\mu(B) = \mathbb{E} N_B \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (89)$$

- In Verallgemeinerung von (89) kann man für jedes $m \geq 1$ das m -te Momentenmaß $\mu_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{md}) \rightarrow [0, \infty]$ des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ definieren durch

$$\mu_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E}(N_{B_1} \dots N_{B_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (90)$$

- Beachte: Die Definitionsgleichung (90) des m -ten Momentenmaßes μ_m ist äquivalent mit

$$\mu_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E} \sum_{n_1, \dots, n_m} \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_m}(S_{n_1}, \dots, S_{n_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Auf ähnliche Weise wird das m -te faktorielle Momentenmaß $\alpha_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{md}) \rightarrow [0, \infty]$ von $\{N_B\}$ definiert:

$$\alpha_m(B_1 \times \dots \times B_m) = \mathbb{E} \sum_{n_1, \dots, n_m}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times \dots \times B_m}(S_{n_1}, \dots, S_{n_m}) \quad \forall B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (91)$$

wobei sich die Summation in (91) über alle m -Tupel (n_1, \dots, n_m) von paarweise verschiedenen Indizes erstreckt und $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung der Atome von $\{N_B\}$ ist.

Beachte Unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (90) und (91) von μ_2 bzw. α_2 ergibt sich, dass

$$\mu_2(B_1 \times B_2) = \alpha_2(B_1 \times B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (92)$$

bzw.

$$\text{Var } N_B = \alpha_2(B \times B) + \mu(B) - (\mu(B))^2 \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (93)$$

Mit Hilfe der Produktdarstellung $\gamma^{\dagger} = P_N \times \mu$ des reduzierten Campbellschen Maßes γ^{\dagger} von Poisson-Prozessen, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, zeigen wir nun, dass das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 von Poisson-Prozessen ebenfalls ein Produktmaß ist.

Theorem 4.15 Wenn $\{N_B\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist, dann gilt $\alpha_2 = \mu \times \mu$, d.h.,

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \mu(B_1) \mu(B_2) \quad (94)$$

für beliebige $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (91) des zweiten faktoriellen Momentenmaßes α_2 ergibt sich, dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) \stackrel{(91)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) = \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi - \delta_x, x) \varphi(dx) P_N(d\varphi),$$

wobei

$$f(\varphi, x) = \varphi(B_1) \mathbb{1}_{B_2}(x). \quad (95)$$

- Hieraus und aus der Definitionsgleichung (33) des reduzierten Campbellschen Maßes $\gamma^!$ von $\{N_B\}$ ergibt sich, dass $\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d} f(\varphi, x) \gamma^!(d(\varphi, x))$.
- Mit Hilfe der Produktdarstellung $\gamma^! = P_N \times \mu$, die in Theorem 4.6 hergeleitet worden ist, ergibt sich nun, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(\varphi, x) P_N(d\varphi) \mu dx \\ &\stackrel{(95)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \varphi(B_1) \mathbb{1}_{B_2}(x) P_N(d\varphi) \mu dx = \mu(B_1) \mu(B_2). \quad \square \end{aligned}$$

Aus Theorem 4.15 und aus der Definitionsgleichung (3.25) von Cox-Prozessen ergibt sich sofort das folgende Resultat.

Korollar 4.3 Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Dann gilt

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B_1) \eta(B_2) P_\Lambda(d\eta) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (96)$$

Außerdem lässt sich mit Hilfe von Theorem 4.15 eine Darstellungsformel für das zweite faktorielle Momentenmaß von Poissonschen Cluster-Prozessen herleiten.

Theorem 4.16

- Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (97)$$

- wobei $\{S_n\}$ ein Poisson-Prozess mit dem (lokal endlichen und diffusen) Intensitätsmaß $\mu^{(0)}$ ist, für das $\mu^{(0)}(\mathbb{R}^d) = \infty$ gilt,
- und $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Punktprozessen mit dem endlichen Intensitätsmaß $\mu^{(1)}$ ist, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und für die

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) < \infty \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \quad (98)$$

gilt, wobei $\mu_2^{(1)}$ das zweite Momentenmaß von $\{N_B^{(1)}\}$ bezeichnet.

- Für das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 von $\{N_B\}$ gilt dann

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d), \quad (99)$$

wobei $\alpha_2^{(1)}$ das zweite faktorielle Momentenmaß von $\{N_B^{(1)}\}$ und μ das Intensitätsmaß des Poissonschen Cluster-Prozesses $\{N_B\}$ bezeichnet.

Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (90) des zweiten Momentenmaßes μ_2 von $\{N_B\}$ und aus der Darstellungsformel (97) für N_B ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
\mu_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(97)}{=} \mathbb{E} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} N_{B_1-S_{n_1}}^{(n_1)} \sum_{n_2=1}^{\infty} N_{B_2-S_{n_2}}^{(n_2)} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} N_{B_1-S_n}^{(n)} N_{B_2-S_n}^{(n)} \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{n_1, n_2}^{\neq} N_{B_1-S_{n_1}}^{(n_1)} N_{B_2-S_{n_2}}^{(n_2)} \right) \\
&= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^{(1)}((B_1 - S_n) \times (B_2 - S_n)) + \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mu^{(1)}(B_1 - S_{n_1}) \mu^{(1)}(B_2 - S_{n_2}),
\end{aligned}$$

wobei sich der zweite Summand des letzten Ausdruckes aus der Unabhängigkeit der Punktprozesse $\{N_B^{(n_1)}\}$ und $\{N_B^{(n_2)}\}$ für $n_1 \neq n_2$ ergibt.

- Außerdem ergibt sich aus der in Theorem 4.15 hergeleiteten Darstellungsformel $\alpha_2^{(0)} = \mu^{(0)} \times \mu^{(0)}$ für das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_2^{(0)}$ des Poisson-Prozesses $\{S_n\}$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mu^{(1)}(B_1 - S_{n_1}) \mu^{(1)}(B_2 - S_{n_2}) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \alpha_2^{(0)}(dx_1, dx_2) \\
&\stackrel{(94)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(0)}(dx_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \mu^{(0)}(dx_2).
\end{aligned}$$

- Somit gilt insgesamt

$$\begin{aligned}
\mu_2(B_1 \times B_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - x_1) \mu^{(0)}(dx_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - x_2) \mu^{(0)}(dx_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2),
\end{aligned}$$

wobei sich der zweite Summand des letzten Ausdruckes aus der Darstellungsformel

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B - x) \mu^{(0)}(dx) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (100)$$

für das Intensitätsmaß μ von $\{N_B\}$ ergibt, die in Theorem 3.14 hergeleitet worden ist; vgl. (3.77).

- Hieraus ergibt sich nun mit Hilfe von (92) und (100), dass

$$\begin{aligned}
\alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(92)}{=} \mu_2(B_1 \times B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \\
&\stackrel{(100)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mu_2^{(1)}((B_1 - x) \times (B_2 - x)) - \mu^{(1)}((B_1 \cap B_2) - x) \right) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2) \\
&\stackrel{(92)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - x, B_2 - x) \mu^{(0)}(dx) + \mu(B_1) \mu(B_2). \quad \square
\end{aligned}$$

4.3.4 Zweites reduziertes Momentenmaß; Ripleysche K-Funktion

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein stationärer Punktprozess mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$, so dass $\mathbb{E} N_B^2 < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. Dann ist das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 von $\{N_B\}$ lokal endlich, und es lässt sich durch das Intensitätsmaß der reduzierten Palmischen Verteilung P_N^1 von $\{N_B\}$ ausdrücken. Um dies zu zeigen, ist das folgende *verfeinerte Campbellsche Theorem* nützlich.

Lemma 4.1 Für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ gilt

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(x, \varphi) P_N^1(d\varphi) dx. \quad (101)$$

Der *Beweis* von Lemma 4.1 ergibt sich mit algebraischer Induktion aus der Definitionsgleichung (18) der reduzierten Palmischen Verteilung P_N^1 . Er verläuft ähnlich wie der Beweis von Theorem 3.1 und wird deshalb weggelassen.

Theorem 4.17 Für beliebige $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \lambda \int_{B_1} \mu^1(B_2 - x) dx, \quad (102)$$

wobei $\mu^1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ das Intensitätsmaß der reduzierten Palmischen Verteilung P_N^1 von $\{N_B\}$ ist, d.h.,

$$\mu^1(B) = \int_{\mathbb{N}} \varphi(B) P_N^1(d\varphi) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (103)$$

Beweis

- Aus der Definitionsgleichung (91) von α_2 ergibt sich, dass für beliebige $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(91)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(S_{n_1}, S_{n_2}) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(x_1, x_2) (\varphi - \delta_{x_1})(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_1 \times B_2}(x_1, x_1 + x_2) (\mathbf{T}_{x_1} \varphi - \delta_o)(dx_2) \varphi(dx_1) P_N(d\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \mathbf{T}_x \varphi - \delta_o) \varphi(dx) P_N(d\varphi), \end{aligned}$$

wobei

$$f(x, \varphi) = \mathbb{1}_{B_1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_2 - x}(y) \varphi(dy).$$

- Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 4.1, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(101)}{=} \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} f(x, \varphi) P_N^1(d\varphi) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_2 - x}(y) \varphi(dy) P_N^1(d\varphi) dx \\ &= \lambda \int_{B_1} \mu^1(B_2 - x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Definition Das Maß $K : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$K(B) = \frac{\mu^1(B)}{\lambda} \quad (104)$$

wird das *zweite reduzierte Momentenmaß* von $\{N_B\}$ genannt. Wenn $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist, dann heißt $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $K(r) = K(B(o, r))$ die *Ripleysche K-Funktion*. Darüber hinaus wird noch die so genannte L-Funktion $L : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ betrachtet mit

$$L(r) = \left(\frac{K(r)}{\kappa_d} \right)^{1/d} \quad \forall r \geq 0, \quad (105)$$

wobei $\kappa_d = \nu_d(B(o, 1))$ das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Beachte

- Wenn $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess ist, dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (104) mit Hilfe des Satzes von Slivnyak (vgl. Theorem 4.5), dass

$$K(B) = \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad \text{bzw.} \quad L(r) = r \quad \forall r \geq 0. \quad (106)$$

- Wenn $\{N_B\}$ ein Poissonscher Cluster-Prozess mit der Intensität λ ist, dann ergibt sich aus (104) mit Hilfe von Theorem 4.9, dass

$$K(B) = \nu_d(B) + \lambda^{-1} \mu_{\tilde{N}-\delta_o}(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (107)$$

wobei $\mu_{\tilde{N}-\delta_o}$ das Intensitätsmaß von $\tilde{N} - \delta_o$ und $\{\tilde{N}_B\}$ ein zufälliger Punktprozess mit der in (61) eingeführten Verteilung \tilde{P} ist. Insbesondere gilt somit

$$K(B) \geq \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (108)$$

Die Definitionsgleichung (104) des zweiten reduzierten Momentenmaßes führt zu dem folgenden (erwartungstreuen) Schätzer für die Größe $\lambda^2 K(B)$.

Theorem 4.18 *Für beliebige $B, W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, so dass $\nu_d(W \cap (W + z)) > 0$ für jedes $z \in B$, ist durch*

$$\lambda^2 \widehat{K}(B) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_B(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \quad (109)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\lambda^2 K(B)$ gegeben.

Beweis

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow [0, \infty)$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{\mathbb{1}_B(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{W \times W}(x_1, x_2)}{\nu_d(W \cap (W + (x_2 - x_1)))}.$$

- Dann ergibt sich aus der Definitionsgleichung (91) des zweiten faktoriellen Momentenmaßes α_2 und mit Hilfe von (102) bzw. (109), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \lambda^2 \widehat{K}(B) &\stackrel{(109)}{=} \mathbb{E} \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_B(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \\ &\stackrel{(91)}{=} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x_1, x_2) \alpha_2(d(x_1, x_2)) \\ &\stackrel{(102)}{=} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, x+y) K(dy) dx \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, x+y) dx K(dy) \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{1}_B(y)}{\nu_d(W \cap (W + y))} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{W \times W}(x, x+y) dx K(dy) \\ &= \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(y) K(dy) \\ &= \lambda^2 K(B). \end{aligned} \quad \square$$

Beachte

- Aus Theorem 4.15 ergibt sich, dass

$$\widehat{\lambda^2} = \frac{N_W(N_W - 1)}{\nu_d^2(W)} \quad (110)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für λ^2 ist, wenn $\{N_B\}$ ein homogener Poisson-Prozess ist. Zusammen mit Theorem 4.18 führt dies zu dem folgenden „natürlichen“ Schätzer für $K(B)$:

$$\widehat{K(B)} = \frac{\lambda^2 \widehat{K(B)}}{\widehat{\lambda^2}}. \quad (111)$$

- Wenn $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist, dann ergibt sich aus Theorem 4.18 insbesondere, dass

$$\lambda^2 \widehat{K(r)} = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{\mathbb{1}_{B(o,r)}(S_{n_2} - S_{n_1}) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{\nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))} \quad (112)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\lambda^2 K(r)$ ist. Ähnlich wie in (111) führt dies zu den Schätzern

$$\widehat{K(r)} = \frac{\lambda^2 \widehat{K(r)}}{\widehat{\lambda^2}} \quad \text{und} \quad \widehat{L(r)} = \left(\frac{\widehat{K(r)}}{\kappa_d} \right)^{1/d} \quad (113)$$

für $K(r)$ bzw. $L(r)$, wobei $\widehat{\lambda^2}$ in (110) gegeben ist.

- Im isotropen Fall wird außer $\widehat{K(r)}$ bzw. $\widehat{L(r)}$ noch eine weitere Art von Schätzern für $K(r)$ bzw. $L(r)$ betrachtet. Dabei wird der Schätzer $\widehat{\lambda^2}$ in (113) für jedes $r > 0$ ersetzt durch $(\widetilde{\lambda(r)})^2$ mit

$$\widetilde{\lambda(r)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_W(S_n) \nu_d(W \cap B(S_n, r))}{d \kappa_d \int_0^r u^{d-1} \bar{c}_W(u) du}, \quad (114)$$

wobei die „isotropisierte“ *Mengenkovarianzfunktion* $\bar{c}_W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ von W gegeben ist durch

$$\bar{c}_W(u) = \frac{1}{\nu_{d-1}(\partial B(o, 1))} \int_{\partial B(o, 1)} c_W(u, v) dv \quad \forall u \geq 0 \quad (115)$$

und $c_W : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die (eigentliche) *Mengenkovarianzfunktion* von W ist mit

$$c_W(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_W(y) \mathbb{1}_W(y - x) dy \quad (116)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ mit der Darstellung $x = (u, v)$ in Polarkoordinaten.

4.3.5 Produktdichte und Paarkorrelationsfunktion; randkorrigierte Kernschätzer

Wir betrachten nun den Fall, dass das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ absolutstetig bezüglich des $2d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h., α_2 hat eine Dichte $\rho_2 : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow [0, \infty)$, so dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \int_{B_2} \rho_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (117)$$

Die in (117) gegebene Funktion ρ_2 wird die *Produktdichte* zweiter Ordnung von $\{N_B\}$ genannt.

Beachte

- Mit ähnlichen Argumenten wie bei der lokalen Charakterisierung der Intensität von stationären Punktprozessen (vgl. den Satz von Korolyuk in Theorem 4.4) kann man sich überlegen, dass die Größe $\rho_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ näherungsweise als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass in den infinitesimalen Umgebungen dx_1 und dx_2 von $x_1 \neq x_2$ jeweils ein Atom des zufälligen Zählmaßes $\{N_B\}$ liegt.
- Wenn $\{N_B\}$ ein stationäres zufälliges Zählmaß mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$ ist, dann hängt die Produktdichte $\rho_2(x_1, x_2)$ nur von der Differenz $x_2 - x_1$ ab. Wenn $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist, dann gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \rho_2(r), \quad \text{wobei } r = |x_2 - x_1|. \quad (118)$$

- Im letzteren Fall wird darüber hinaus die *Paarkorrelationsfunktion* $g : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$ betrachtet, wobei

$$g(r) = \frac{\rho_2(r)}{\lambda^2} \quad \forall r \geq 0. \quad (119)$$

- Wenn die Ripleysche K-Funktion differenzierbar ist, dann ergibt sich unmittelbar aus den entsprechenden Definitionsgleichungen, dass sich die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ durch die Ableitung $dK(r)/dr$ der K-Funktion ausdrücken lässt. Und zwar gilt dann

$$g(r) = \frac{dK(r)/dr}{d\kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (120)$$

Wenn $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist, dann werden in der Literatur als Schätzer $\hat{\rho}_2(r)$ für die Produktdichte $\rho(r) = \rho_2(x_1, x_2)$ mit $r = |x_2 - x_1|$ randkorrigierte Kernschätzer vorgeschlagen:

$$\hat{\rho}_2(r) = \sum_{n_1, n_2}^{\neq} \frac{k(|S_{n_2} - S_{n_1}| - r) \mathbb{1}_{W \times W}(S_{n_1}, S_{n_2})}{d\kappa_d r^{d-1} \nu_d(W \cap (W + (S_{n_2} - S_{n_1})))}, \quad (121)$$

wobei ist $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Kernfunktion, beispielsweise

$$k(t) = \frac{1}{2h} \mathbb{1}_{[-h, h]}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für eine gewisse Bandbreite $h > 0$. Ähnlich wie in (111) führt dies zu dem Schätzer

$$\hat{g}(r) = \frac{\hat{\rho}_2(r)}{(\hat{\lambda}(r))^2} \quad \forall r > 0 \quad (122)$$

für die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$, wobei $\hat{\lambda}(r)$ ein (randkorrigierter) Schätzer für λ ist, beispielsweise

$$\hat{\lambda}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_W(S_n) \nu_{d-1}(W \cap \partial B(S_n, r))}{d\kappa_d r^{d-1} \bar{c}_W(r)}.$$

4.3.6 Beispiele: Poisson-, Cox- und Cluster-Prozesse; Matérn-Hardcore-Prozesse

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, dass für die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ von homogenen Poisson-Prozessen die Identität $g(r) \equiv 1$ für jedes $r > 0$ gilt. Außerdem diskutieren wir Beispiele von stationären und isotropen Punktprozessen (Cox-Prozesse, Poissonsche Cluster-Prozesse), für deren Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ die Ungleichung $g(r) \geq 1$ für jedes $r > 0$ gilt. Darüber hinaus geben wir eine Klasse von Punktprozessen (Matérn-Hardcore-Prozesse) an, für die die Punktepaare einen vorgegebenen Mindestabstand nicht unterschreiten.

1. *Poisson-Prozesse*

- Sei $\{N_B\}$ ein Poisson-Prozess mit dem absolutstetigen Intensitätsmaß μ , d.h., es gibt eine (Borel-messbare) Intensitätsfunktion $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x) dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (123)$$

- Dann ergibt sich mit Hilfe von Theorem 4.15, dass

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) \stackrel{(94)}{=} \mu(B_1)\mu(B_2) \stackrel{(123)}{=} \int_{B_1} \int_{B_2} \lambda(x_1)\lambda(x_2) dx_1 dx_2.$$

- In diesem Fall ist also die Produktdichte ρ_2 gegeben durch

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda(x_1)\lambda(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d. \quad (124)$$

- Wenn $\{N_B\}$ ein homogener (und somit auch isotroper) Poisson-Prozess mit der Intensität λ ist, dann gilt insbesondere

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda^2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \quad (125)$$

bzw.

$$g(r) = 1 \quad \forall r \geq 0. \quad (126)$$

- Wenn sich also aus der Analyse der Daten ergibt, dass $\hat{g}(r) > 1$, wobei $\hat{g}(r)$ ein geeignet gewählter Schätzer für $g(r)$ ist, dann bedeutet dies, dass die relative Häufigkeit von Punktepaaren mit Abstand r größer als bei einem homogenen Poisson-Prozess ist.

2. *Cox-Prozesse*

- Sei $\{N_B\}$ ein Cox-Prozess, so dass die Realisierungen des zufälligen Intensitätsmaßes $\{\Lambda_B\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 absolutstetig bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind.
- D.h., es gibt ein zufälliges Feld $\{\lambda_x, x \in \mathbb{R}^d\}$, so dass

$$\Lambda_B = \int_B \lambda_x dx \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d). \quad (127)$$

- Wegen Korollar 4.3 ist dann das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 von $\{N_B\}$ gegeben durch

$$\alpha_2(B_1 \times B_2) = \int_{\mathbb{M}} \eta(B_1)\eta(B_2) P_\Lambda(d\eta) = \int_{B_1} \int_{B_2} \mathbb{E}(\lambda_{x_1}\lambda_{x_2}) dx_1 dx_2. \quad (128)$$

- Die Produktdichte ρ_2 von $\{N_B\}$ ist also gegeben durch $\rho_2(x_1, x_2) = \mathbb{E}(\lambda_{x_1}\lambda_{x_2})$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ mit $x_1 \neq x_2$.
- Wenn das zufällige Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ stationär ist, dann ist $\{N_B\}$ ein stationärer Cox-Prozess (vgl. die Theoreme 3.8 und 3.9), und es gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \mathbb{E}(\lambda_0\lambda_{x_2-x_1}) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x_1 \neq x_2. \quad (129)$$

- Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $\{N_B\}$ ein modulierter Poisson-Prozess ist, wobei das zufällige Intensitätsfeld $\{\lambda_x\}$ durch (3.51) gegeben ist. D.h., es gelte

$$\lambda_x = \begin{cases} \lambda_1, & \text{falls } x \in \Xi, \\ \lambda_2, & \text{falls } x \notin \Xi. \end{cases} \quad (130)$$

- Dabei seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ beliebige Zahlen mit $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$, und für ein $r_0 > 0$ gelte $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(S_i, r_0)$, wobei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit der Intensität λ_0 sei.
- Für die Produktdichte ρ_2 von $\{N_B\}$ ergibt sich dann aus (129) und (130), dass

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1, x_2) &= \lambda_1^2 P(x_1 \in \Xi, x_2 \in \Xi) + \lambda_1 \lambda_2 (P(x_1 \in \Xi, x_2 \notin \Xi) + P(x_1 \notin \Xi, x_2 \in \Xi)) \\ &\quad + \lambda_2^2 P(x_1 \notin \Xi, x_2 \notin \Xi) \\ &= \lambda_1^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2\lambda_1 \lambda_2 (p_o - p_{o, x_2 - x_1}) + \lambda_2^2 (1 - 2p_o + p_{o, x_2 - x_1}), \end{aligned}$$

d.h.,

$$\rho_2(x_1, x_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2 \quad \forall x_1 \neq x_2, \quad (131)$$

wobei die Überdeckungswahrscheinlichkeiten

$$p_o = P(o \in \Xi) \quad \text{und} \quad p_{o, x_2 - x_1} = P(o \in \Xi, x_2 - x_1 \in \Xi)$$

in (3.66) bzw. (3.70) gegeben sind.

- Außerdem hatten wir in Theorem 3.11 gezeigt, dass die Intensität λ von $\{N_B\}$ gegeben ist durch $\lambda = \lambda_1 p_o + \lambda_2 (1 - p_o)$.
- Aus (131) ergibt sich somit für die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ von $\{N_B\}$, dass

$$g(r) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_{o, x_2 - x_1} + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 p_o^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 p_o + \lambda_2^2} \quad \forall r = |x_2 - x_1| > 0. \quad (132)$$

- Wegen (3.70) gilt dabei, dass $g(r) > 1$ für $r < 2r_0$ bzw. $g(r) = 1$ für $r \geq 2r_0$.

3. Poissonsche Cluster-Prozesse

- Sei $\{N_B\}$ ein Poissonscher Cluster-Prozess mit

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} N_{B-S_n}^{(n)},$$

so dass das Intensitätsmaß $\mu^{(1)}$ und das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_2^{(1)}$ von $\{N_B^{(1)}\}$ absolutstetige Maße bezüglich des d -dimensionalen bzw. des $2d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes sind, wobei wir die Dichten mit $d\mu^{(1)}/d\nu_d$ bzw. $d\alpha_2^{(1)}/d\nu_{2d}$ bezeichnen.

- Aus der Darstellungsformel (99), die in Theorem 4.16 für das zweite faktorielle Momentenmaß α_2 von $\{N_B\}$ hergeleitet worden ist, ergibt sich dann, dass

$$\begin{aligned} \alpha_2(B_1 \times B_2) &\stackrel{(99)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - y, B_2 - y) \mu^{(0)}(dy) + \mu(B_1)\mu(B_2) \\ &\stackrel{(100)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_2^{(1)}(B_1 - y, B_2 - y) \mu^{(0)}(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2) \\ &= \int_{B_1} \int_{B_2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) \mu^{(0)}(dy) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{B_1} \int_{B_2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

- Die Produktdichte ρ_2 von $\{N_B\}$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1, x_2) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) \mu^{(0)}(dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) \mu^{(0)}(dy_1) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) \mu^{(0)}(dy_2). \quad (133) \end{aligned}$$

- Wenn $\mu^{(0)} = \lambda_0 \nu_d$ für ein $\lambda_0 > 0$, dann ergibt sich aus Theorem 3.14, dass $\{N_B\}$ ein stationärer Poissonscher Cluster-Prozess mit der Intensität $\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ ist, und es gilt

$$\rho_2(x_1, x_2) = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy + \lambda_0^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_1 - y_1) dy_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu^{(1)}}{d\nu_d}(x_2 - y_2) dy_2$$

bzw.

$$\rho_2(x_1, x_2) = (\lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d))^2 + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy. \quad (134)$$

- Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $\{N_B\}$ ein Neyman-Scott-Prozess ist, vgl. Abschnitt 3.3.3. D.h., die Sekundärprozesse $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \dots$ sind gegeben durch

$$N_B^{(n)} = \sum_{i=1}^{T^{(n)}} \delta_{S_i^{(n)}}(B) \quad \forall n \geq 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (135)$$

wobei

- $\{S_i^{(n)}, i, n \geq 1\}$ eine Doppel-Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren $S_i^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist, die von dem Poissonschen Primärprozess $\{S_n\}$ unabhängig ist.
- und $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (mit nichtnegativen ganzzahligen Werten) ist, die von den Folgen $\{S_i^{(n)}\}$ und $\{S_n\}$ unabhängig ist.
- Dabei nehmen wir an, dass die Verteilungsfunktion von $|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}|$ differenzierbar ist.
 - Für das Integral des zweiten faktoriellen Momentenmaßes $\alpha_2^{(1)}$ von $\{N_B^{(1)}\}$ in (134) gilt dann mit der Schreibweise $r = |x_2 - x_1|$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(x_1 - y, x_2 - y) dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\alpha_2^{(1)}}{d\nu_{2d}}(y, x_2 - x_1 + y) dy \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) \frac{\frac{d}{dr} P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d \kappa_d r^{d-1}}. \end{aligned}$$

- Insgesamt ergibt sich aus (134), dass die Paarkorrelationsfunktion des Neyman-Scott-Prozesses $\{N_B\}$ gegeben ist durch

$$g(r) = 1 + \frac{1}{\lambda \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) \frac{\frac{d}{dr} P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d \kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (136)$$

- Sei nun $\{N_B\}$ insbesondere ein Matérn-Cluster-Prozess ist (vgl. Abschnitt 3.2.3), d.h.,

$$T^{(1)} \sim \text{Poi}(\lambda^{(1)} \nu_d(B(o, R))) \quad \text{und} \quad S_1^{(1)} \sim \text{U}(B(o, R))$$

für gewisse Konstanten $\lambda^{(1)} > 0$ und $R > 0$.

- Dann gilt $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(T^{(1)} = n) = (\lambda^{(1)} \nu_d(B(o, R)))^2$, und aus (136) ergibt sich, dass

$$g(r) = 1 + \frac{1}{\lambda_0} \frac{\frac{d}{dr} P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r)}{d \kappa_d r^{d-1}} \quad \forall r > 0. \quad (137)$$

- Für $d = 2$ gilt dabei, dass

$$\frac{d}{dr} P(|S_2^{(1)} - S_1^{(1)}| \leq r) = \begin{cases} \frac{4r}{\pi R^2} \left(\arccos\left(\frac{r}{2R}\right) - \frac{r}{2R} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}} \right), & \text{falls } r \leq 2R, \\ 0, & \text{falls } r > 2R. \end{cases} \quad (138)$$

4. Matérn–Hardcore–Prozesse

- Ein einfaches Beispiel von stationären und isotropen Punktprozessen, für die es einen positiven Mindestabstand $r_0 > 0$ zwischen den Punktpaaren gibt, so dass $g(r) = 0$ für jedes $r \in (0, r_0)$, ist durch Matérn–Hardcore–Prozesse gegeben.
 - Sei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson–Prozess mit der Intensität λ_0 . Außerdem sei $\{M_n\}$ eine Folge von unabhängigen und in $[0, 1]$ –gleichverteilten Zufallsvariablen, so dass die Folgen $\{S_n\}$ und $\{M_n\}$ unabhängig sind.
 - Mit $\{N_B\}$ bezeichnen wir den folgenden Punktprozess, der aus einer Teilfamilie von Atomen S_n des Poisson–Prozesses $\{S_n\}$ gebildet und *Matérn–Hardcore–Prozess* mit dem Hardcore–Radius $r_0 > 0$ genannt wird:

$$N_B = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_B(S_n) \mathbf{1}_{(0, Z_n)}(M_n) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (139)$$

wobei

$$Z_n = \begin{cases} \min_{k: 0 < |S_k - S_n| \leq r_0} M_k, & \text{falls } \#\{k : 0 < |S_k - S_n| \leq r_0\} > 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

das Minimum der „Marken“ M_k derjenigen Punkte $S_k \neq S_n$ ist, die in der Kugel $B(S_n, r_0)$ um den Mittelpunkt S_n liegen.

- Man kann sich leicht überlegen, dass der in (139) definierte Punktprozess $\{N_B\}$ stationär und isotrop ist. Außerdem kann man zeigen, dass die Intensität λ von $\{N_B\}$ gegeben ist durch

$$\lambda = \frac{1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)}{\kappa_d r_0^d}, \quad (140)$$

denn es gilt

$$\lambda = p \lambda_0 \quad \text{mit} \quad p = \int_0^1 p(t) dt = \frac{1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)}{\lambda_0 \kappa_d r_0^d},$$

wobei $p(t) = \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d t)$ die (Palmsche) Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein (willkürlich ausgewählter) Punkt des Poisson–Prozesses $\{S_n\}$, dessen Marke gleich t ist, nicht gestrichen wird.

- Die Produktdichte $\rho_2(x_1, x_2)$ des Matérn–Hardcore–Prozesses $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\rho_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r \leq r_0, \\ \frac{2c_{r_0}(r)(1 - \exp(-\lambda_0 \kappa_d r_0^d)) - 2\kappa_d r_0^d(1 - \exp(-\lambda_0 c_{r_0}(r)))}{\kappa_d r_0^d c_{r_0}(r)(c_{r_0}(r) - \kappa_d r_0^d)}, & \text{falls } r_0 < r \leq 2r_0, \\ \lambda^2 & \text{falls } r > 2r_0, \end{cases} \quad (141)$$

wobei $c_{r_0}(r) = \nu_d(B(o, r_0) \cup B(x_2 - x_1, r_0))$ und $r = |x_2 - x_1|$.

- Für die Paarkorrelationsfunktion $g(r)$ von $\{N_B\}$ gilt also

$$g(r) = 0, \text{ falls } r \leq r_0, \quad \text{bzw.} \quad g(r) > 1, \text{ falls } r_0 < r \leq 2r_0, \quad \text{bzw.} \quad g(r) = 1, \text{ falls } r > 2r_0.$$