Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
18.1.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 25.1.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Für eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ gilt für jedes $\varepsilon > 0$ nach der Tschebychev-Ungleichung $P(|\,X - \mu\,| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$. Zeigen Sie nun die einseitige Tschebychev-Ungleichung

$$P(X \leq \mu - \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2} \quad \text{und} \quad P(X \geq \mu + \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

Anleitung: Für $t < \mu + \varepsilon\sigma$ gilt $\frac{(X-t)^2}{(\mu+\varepsilon\sigma-t)^2} \geq 1\!\!1\{X \geq \mu + \varepsilon\sigma\}$, für $t > \mu - \varepsilon\sigma$ gilt $\frac{(X-t)^2}{(\mu-\varepsilon\sigma-t)^2} \geq 1\!\!1\{X \leq \mu - \varepsilon\sigma\}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Laut Brockhaus sind 4% der männlichen Bundesbürger Linkshänder. Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebychev eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 800 Studenten zwischen 24 und 40 Linkshänder sind. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Wert unter Binomialverteilung (z.B. unter Verwendung von R : $pbinom(x, n, p)$ liefert $F_X(x)$ für $X \sim Bin(n, p)$) beziehungsweise dem Näherungswert unter Normalverteilung (zentraler Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace. Hier Tabelle verwenden).

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Beweisen Sie mittels der Jensen-Ungleichung, dass

$$a_H \leq a_G \leq a_A$$

wobei $a_A = 1/n \cdot (a_1 + \cdots + a_n)$ das arithmetische Mittel, $a_G = (a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n}$ das geometrische Mittel und $a_H = \frac{1}{(\frac{1}{n}(1/a_1 + \cdots + 1/a_n))}$ das harmonische Mittel bezeichnet.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Seien $X, X_n, Y, Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie folgende Aussagen :

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X + Y$ und $\mathbb{E}X_n \longrightarrow \mathbb{E}X$, falls $X, X_n, Y, Y_n \in L^1$ und $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} Y$.

(b) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} X + Y$ und $\mathbb{E}(X_n^2) \longrightarrow \mathbb{E}(X^2)$, falls $X, X_n, Y, Y_n \in L^2$ und $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} Y$.

(c) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} XY$, falls $X, X_n, Y, Y_n \in L^2$ und $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} Y$.