Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
25.1.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 1.2.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), U[0,1])$. Zeigen Sie:

(a) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = n\,\mathbb{1}_{(0,1/n)}$ gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.

(b) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = \sqrt{n}\,\mathbb{1}_{(0,1/n)}$ gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ und $X_n \xrightarrow{L^1} 0$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^2} 0$.

(c) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_1 = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1/2)}$, $X_2 = 2 \cdot \mathbb{1}_{[1/2,1)}$, $X_3 = 3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1/3)}$, $X_4 = 3 \cdot \mathbb{1}_{[1/3,2/3)}$, $X_5 = 3 \cdot \mathbb{1}_{[2/3,1)}, \ldots$ gilt $X_n \xrightarrow{P} 0$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ und **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.

(d) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/2+1/n]}$ und $X = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{P} X$.

(e) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim U[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ und $X = 1/2$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$. Außerdem gilt **nicht** $F_{X_n}(1/2) \to F_X(1/2) = 1$ für $n \to \infty$. Ist dies ein Widerspruch zur Aussage $X_n \xrightarrow{d} X$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen mit $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die *fast sichere Konvergenz* aus der *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit* folgt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,X_1 = \mu$ und $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$$

falls X_j unabhängig von X_{j-i}, X_{j+i} für alle $i \geq 2$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $\{X_n\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim U[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$n(1 - \max\{X_1, \ldots, X_n\}) \xrightarrow{d} X \sim \mathrm{Exp}(1) \qquad (n \to \infty)\,.$$