Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
9.11.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 16.11.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Das Ereignis A sei unabhängig von den Ereignissen B_1 und B_2. Weiter gelte $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Zeige, dass A und $B_1 \cup B_2$ unabhängig sind.

(b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau eines dieser Ereignisse ein?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Die Ereignisse A, B, C und D seien gegeben durch

- A : die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf
- B : es erscheint mindestens einmal Kopf
- C : es erscheint mindestens einmal Zahl
- D : die zweite Münze zeigt Kopf

Überprüfe jeweils, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind (mit Begründung) :

(a) A und C

(b) A und D

(c) B und C

(d) B und D

Aufgabe 3 (4+1+4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass

(a) $A_1^c, \ldots, A_n^c$ unabhängige Ereignisse sind,

(b) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$ ist,

(c) $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = 1 \Longleftrightarrow P(\limsup_i A_i) = 1$, falls gilt $P(A_i) < 1$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit $p_i = \mathbb{P}(X = i) = c \cdot q^i$ für $i = 1, 2, ...$ und $0 < q < 1$.

(a) Bestimmen Sie c, so dass $\{p_i\}$ eine Zähldichte bildet.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \text{ ist gerade})$.

(c) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen $Y = \min\{X, 8\}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen stochastisch äquivalent, falls

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

Zeigen Sie : Zwei stochastisch äquivalente Zufallsvariablen besitzen die gleiche Verteilung und die Umkehrung ist i. a. falsch.