

Dipl.-WiWi Michael Alpert

Institut für Wirtschaftspolitik

Helmholtzstr. 20, Raum E 03

Tel. 0731 50 24264



Wintersemester 2006/2007

Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften

Universität Ulm

michael.alpert@uni-ulm.de

Übung 2

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

1 Einführung

Grundbegriffe, Produktionsfunktion

2 Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

*Substitutionselastizität, Kapitalintensität, Produktivität,
Grenzproduktivität, Produktionselastizität, Skalenelastizität
totale Faktorproduktivität*

3 Ein empirisches Beispiel

*H. Wienert: Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
als Beispiel einer volkswirtschaftlichen Produktionsfunktion,
in WISU, 1/1998, S. 39-42.*

1 Einführung

1.1 Grundbegriffe

- Produktion Y
- Produktionspotential YP
- Auslastungsgrad der Produktionspotentials $Q = Y/YP$
- Produktionsfunktion $YP = YP(K, L, A)$
 - Kapital K
 - Arbeitskräfte L
 - Skalierungsparameter (totale Faktorproduktivität) A

1.2 Produktionsfunktion

In Unternehmen werden Inputs (Produktionsfaktoren) durch einen Produktionsprozess in Outputs transformiert.

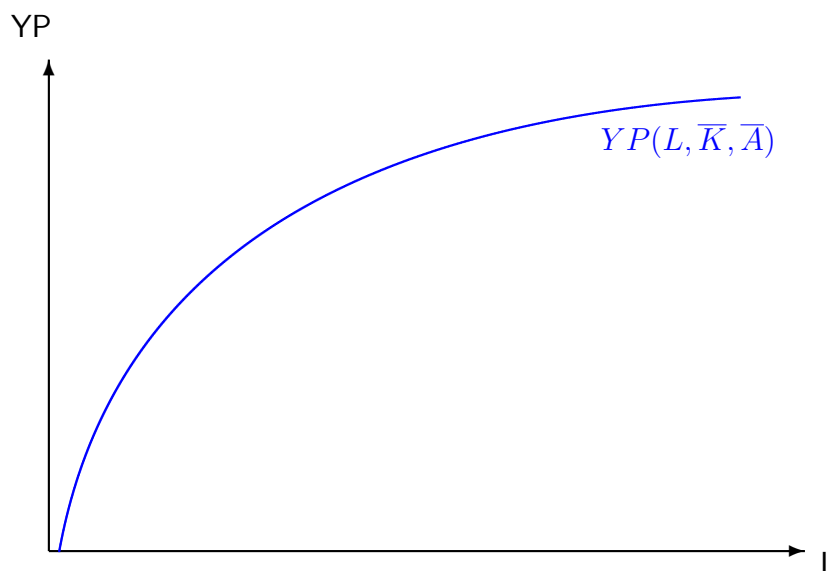
Die **Produktionsfunktion** gibt die **maximale Outputmenge** an, die man mit gegebener Anzahl von Produktionsfaktoren bei einem gegebenen Stand der Technik herstellen kann.

2 Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist eine **substitutionale Produktionsfunktion** der Form:

$$YP = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}.$$

Abbildung 1: Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



2.1 Eigenschaften der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Kapitalintensität K/L

- Die Kapitalintensität gibt an, wieviel Kapital auf eine Arbeitskraft kommt.

Produktivität

- Die Durchschnittsproduktivität der Arbeit YP/L gibt an, wieviel Output pro Arbeitskraft erzielt wird.
- Die Durchschnittsproduktivität des Kapitals YP/K gibt an, wieviel Output pro Kapital erzielt wird.

Grenzproduktivität

- Die Grenzproduktivität der Arbeit $\frac{\delta YP}{\delta L}$ gibt an, wie sich der Output bei marginaler Veränderung der eingesetzten Arbeitsmenge ändert.
Graphisch entspricht die Grenzproduktivität der Arbeit der Steigung der Produktionsfunktion in einem YP-L-Diagramm.
- Die Grenzproduktivität des Kapitals $\frac{\delta YP}{\delta K}$ gibt an, wie sich der Output bei marginaler Veränderung der eingesetzten Kapitalmenge ändert.
Graphisch entspricht sie der Steigung der Produktionsfunktion in einem YP-K-Diagramm.
- Das Grenzprodukt gibt an, um wieviele **Einheiten** die Produktion bei einer marginalen Ausweitung des Faktoreinsatzes steigen kann.
- Die Grenzproduktivität beider Produktionsfaktoren ist positiv und abnehmend.

Produktionselastizitäten

- Die Produktionselastizität der Arbeit ist $\frac{\delta YP}{\delta L} \cdot \frac{L}{YP}$
- Die Produktionselastizität des Kapitals ist $\frac{\delta YP}{\delta K} \cdot \frac{K}{YP}$.
- Die Produktionselastizität gibt an, um wieviel **Prozent** die Produktion bei einer Ausweitung des Faktoreinsatzes um 1 Prozent steigen kann.
- Die Produktionselastizität ist bei einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion konstant.

Homogenität und Skalenerträge (returns of scale)

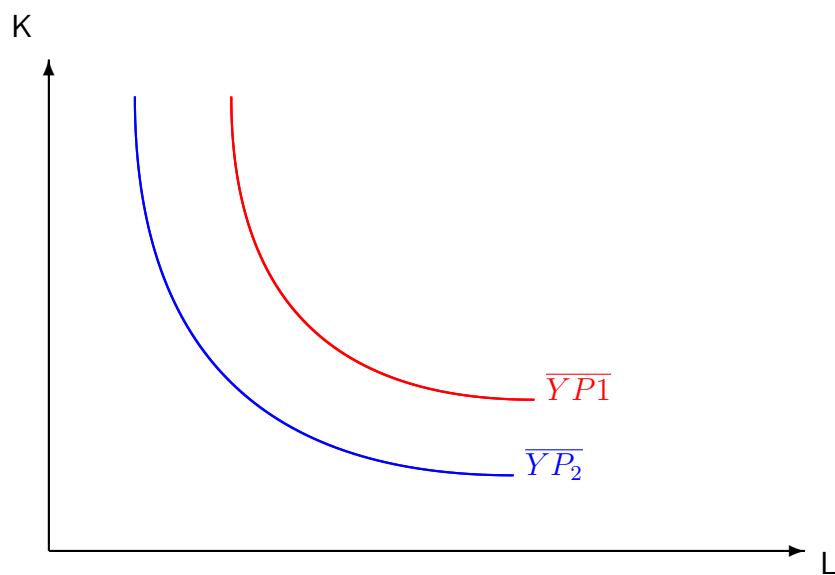
Eine Produktionsfunktion heißt **homogen vom Grad c** , wenn für jedes $\lambda > 0$ gilt: $\lambda^c \cdot YP = YP(\lambda K, \lambda L, A)$.

Werden alle Inputfaktoren K , L mit einer Konstanten λ multipliziert, wie erhöht sich dann der Output YP ?

- linear-homogene Produktionsfunktion ($c = 1$), d.h. konstante Skalenerträge: Output und Input steigen im selben Verhältnis also proportional. Verdoppelt sich der Input, verdoppelt sich der Output.
- überproportionale-homogene Produktionsfunktion ($c > 1$), d.h. zunehmende Skalenerträge
- unterproportionale-homogene Produktionsfunktion ($c < 1$), d.h. abnehmende Skalenerträge.

2.2 Substitution von Kapital und Arbeit

Abbildung 2: Isoquante der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



Die **Isoquante** ist der geometrische Ort aller Faktorkombinationen, die das gleiche Outputniveau hervorbringen.

- Die **Grenzrate der technischen Substitution** entspricht der Steigung der Isoquante.
- Die Grenzrate der technischen Substitution ist für eine konstante Outputmenge definiert und gibt an, um wieviele Einheiten die Einsatzmenge des Faktors Arbeit L erhöht (verringert) werden muss, wenn der Faktor Kapital um eine infinitesimal kleine Einheit reduziert (vermeht) wird.
- Die Grenzrate der technischen Substitution ist abnehmend.
- Die Grenzrate der technischen Substitution entspricht dem umgekehrten Verhältnis der Grenzproduktivitäten zweier Inputfaktoren $\frac{\delta YP / \delta L}{\delta YP / \delta K}$.

2.3 Die totale Faktorproduktivität

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $YP = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$ kann auch geschrieben werden als:

$$\ln YP = \ln A + \alpha \cdot \ln K + (1 - \alpha) \cdot \ln L.$$

Liegt das Interesse auf der Veränderung des Produktionspotentials, lautet die Gleichung:

$$\Delta \ln YP = \Delta \ln A + \alpha \cdot \Delta \ln K + (1 - \alpha) \cdot \Delta \ln L.$$

Empirisch ist das Wachstum des Produktionspotentials, des Kapitals und der Arbeitskräfte beobachtbar.

Die Veränderung von A lässt sich über eine Umformung der Gleichung errechnen:

$$\Delta \ln A = \Delta \ln YP - \alpha \cdot \Delta \ln K - (1 - \alpha) \cdot \Delta \ln L.$$

Wie ist die Veränderung des Skalierungsparameters A zu interpretieren?

⇒ $\Delta \ln A$ ist die Rate des technischen Fortschritts!

Häufig wird ein konstantes Wachstum des technischen Fortschritts unterstellt $A_t = \bar{A} \cdot \exp(\gamma \cdot t)$ mit γ als Rate des technischen Fortschritts.

3 Ein empirisches Beispiel

Als Beispiel einer Schätzung des Cobb-Douglas-Produktionsfunktion dient eine Schätzung für Westdeutschland über die Jahre 1960-1994 (Vgl. Wienert 1998).

Wienerts Schätzung ergab folgende Produktionsfunktion:

$$YP = 30970 \cdot K^{0.515} \cdot L^{1.076}.$$

Betrachtet man die Isoquanten von 1960 (YP=920 Mrd. DM), 1978 (YP=1650 Mrd. DM) und 1995 (YP=2350 Mrd. DM), so ist zu erkennen, dass sich die Faktorintensitäten zugunsten des Kapitals und zu Lasten des Arbeitseinsatzes verschoben haben.