Matthias Künzer, Norbert Renz

# Lineare Algebra für Informatiker, Übungen

**Aufgabe 54** (12.5 Punkte).
Entscheide, für welche Parameter $a, b, c \in \mathbf{C}$ die Matrix $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ normal, unitär bzw. hermitesch ist.

(1) $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (kein Parameter).

(2) $A := \begin{pmatrix} 1 & i & 3 \\ -i & -2 & 1+i \\ 3 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$ (kein Parameter).

(3) $A := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

(4) $A := a \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & c & -2 \\ 2 & b & -1 \end{pmatrix}$.

(5) $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 55** (1+4+4 Punkte).
Sei $U \leq \mathbf{C}^n$. Gib eine Orthonormalbasis von $U$ an. Berechne weiter eine Orthonormalbasis von $U^\perp := \{x \in \mathbf{C}^n \mid \bar{y}^{\mathrm{t}} x = 0 \ \forall y \in U\}$. (Hinweis: ergänze zunächst zu Basis von $\mathbf{C}^n$, wende Gram-Schmidt an und teile die erhaltene Basis in Basen von $U$ und von $U^\perp$.)

(1) Zeige, zunächst, daß mit obiger Definition allgemein $U^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathbf{C}^n$ wird.

(2) Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{C}^3$.

(3) Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{C}^5$.

**Aufgabe 56** (8 Punkte).
Seien $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege.

(1) Ist $A$ von der Form $A = \bar{C}^{\mathrm{t}} C$ für ein $C \in \mathbf{C}^{m\times n}$, so ist $A$ hermitesch.

(2) Für $r \in \mathbf{R}$ ist die Matrix $r(A + \bar{A}^{\mathrm{t}})$ hermitesch.

(3) Sind $A$, $B$ hermitesch, so ist $AB$ normal.

(4) Jede Permutationsmatrix ist unitär.

(5) Für jedes $x \in \mathbf{C}^n$ mit $\|x\| = 1$ gibt es eine unitäre Matrix $A$ so, daß $x$ eine Spalte dieser Matrix ist.

(6) Ist $A$ hermitesch, und ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\lambda \in \mathbf{R}$.

(7) Für $x, y \in \mathbf{C}^n$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(8) Die Matrix $A$ ist genau dann unitär, wenn $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbf{C}^n$.