M. Künzer, J. Marhenke

Lösung 12

Aufgabe 48.

(1) (a) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$. Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

(b) Eine Basis von $E_A(1)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = 1$ ist 2. Eine Basis von $E_A(-1)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = -1$ ist 1.

(c) Es gilt $H_A(1) = E_A(1)$ und $H_A(-1) = E_A(-1)$. In der Tat ist das zusammengesetzte Tupel $\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbf{C}^3$, was die Hauptraumzerlegung verifiziert.

(Jordan: z.B. $S = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, die Matrix ist diagonalisierbar, $\mu_A(X) = (X-1)(X+1)$. Elementarteiler der charakteristischen Matrix sind 1, $(X+1)$, $(X-1)(X+1)$.)

(2) (a) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = X(X-i)^2$. Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = i$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

(b) Eine Basis von $E_A(0)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = 0$ ist 1. Eine Basis von $E_A(i)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = i$ ist 1.

(c) Es gilt $H_A(0) = E_A(0)$. Ferner ist z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $H_A(i)$. In der Tat ist nun das zusammengesetzte Tupel $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbf{C}^3$, was die Hauptraumzerlegung verifiziert.

(Jordan: z.B. $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar. Es ist $\mu_A(X) = X(X-i)^2$. Elementarteiler der charakteristischen Matrix sind 1, 1, $X(X-i)^2$.)

(3) (a) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = (X-2)^4$. Die Matrix hat den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 4.

(b) Eine Basis von $E_A(2)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = 2$ ist 1.

(c) Wie sich durch eine sukzessive Rechnung ergibt, ist z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $H_A(2)$. Wir erkennen $H_A(2) = \mathbf{C}^4$, was die direkte Zerlegung (in einen einzigen direkten Summanden) bestätigt. Verwendet man diese direkte Zerlegung von vorneherein, so kann man natürlich sofort die Standardbasis als Basis von $H_A(2)$ angeben.

(Jordan: z.B. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ liefert $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar. Es ist $\mu_A(X) = (X-2)^4$. Elementarteiler der charakteristischen Matrix sind 1, 1, 1, $(X-2)^4$.)

(4) (a) Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(X) = (X-1)^4(X+1)^2$. Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 4 und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

(b) Eine Basis von $E_A(1)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = 1$ ist 2.

Eine Basis von $E_A(-1)$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -1 ist 2.

(c) Es gilt $H_A(-1) = E_A(-1)$. Ferner ist z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $H_A(1)$. In der Tat ist nun das zusammengesetzte Tupel $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbf{C}^6$, was die direkte Zerlegung in Haupträume bestätigt.

(Jordan: z.B. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ liefert $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar. Es ist $\mu_A(X) = (X+1)(X-1)^3$. Elementarteiler der charakteristischen Matrix sind 1, 1, 1, 1, $(X+1)(X-1)$, $(X+1)(X-1)^3$.)

Aufgabe 49.

(1) Als charakteristisches Polynom erhalten wir

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 & \cdots & -1 & -1 \\ & & & \ddots & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -X & X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -X & 0 & X & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -X & 0 & 0 & \cdots & X & 0 \\ -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix} = X^{n-1}\det\begin{pmatrix} X-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= X^{n-1}\det\begin{pmatrix} X-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^{n-1}(X-n)\,.
\end{aligned}$$

Z.B. ist $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $E_A(0)$. Für $E_A(n)$ ist eine Basis z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(2) Mit Induktion wird

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\underbrace{\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & X-a_{n-1} \end{pmatrix}}_{n\times n} = X\det\underbrace{\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & X-a_{n-1} \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{n-1}(-a_0)\det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&= X(X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - \cdots - a_2X - a_1) - a_0 = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0\,.
\end{aligned}$$

Sei $\chi_A(X) = \prod_{j\in[1,k]}(X-\lambda_j)^{m_j}$ mit $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$. Für einen Eigenwert λ_j erhalten wir

$$\begin{aligned}
E_A(\lambda_j) &= \operatorname{Kern}(\lambda_j E - A) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_j & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j & -1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda_j - a_{n-1} \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_j & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^3 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \lambda_j^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda_j - a_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_j & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^3 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \lambda_j^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -a_0 - a_1\lambda_j^1 - \cdots - a_{n-1}\lambda_j^{n-1} + \lambda_j^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \lambda_j & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_j^3 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \lambda_j^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \lambda_j^3 \\ \vdots \\ \lambda_j^{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

(Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit von λ_j gleich 1, wie groß die algebraische Vielfachheit m_j auch immer ist.)

Aufgabe 50. Der Körper $L = K(X)$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, da das Polynom $Y^2 - X \in L[Y]$ in L keine Nullstelle besitzt. In der Tat, wäre $a = \frac{f(X)}{g(X)} \in L$ mit $a^2 = \frac{(f(X))^2}{(g(X))^2} = X$ eine Nullstelle in L, so wäre $2\deg f = 2\deg g + 1$, was nicht sein kann.

Aufgabe 51.

(1) Die Aussage ist falsch. Man betrachte das Gegenbeispiel $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $E_A(1) = \langle\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ und $E_A(0) = \langle\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$. Dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \lambda\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\lambda \in \mathbf{C}$, und also $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ kein Eigenvektor.

(2) Die Aussage ist richtig. Da x Eigenvektor von A und von B ist, gilt $Ax = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbf{C}$ und $Bx = \mu x$ für ein $\mu \in \mathbf{C}$. Aus $(A+B)x = Ax + Bx = (\lambda+\mu)x$ ersehen wir, daß x Eigenvektor von $A+B$ zum Eigenwert $\lambda+\mu$ ist.

(3) Die Aussage ist richtig. Erstes Argument. Es liegen x, y und z in verschiedenen Haupträumen von A. Mit der direkten Zerlegung von $\mathbf{C}^n$ in Haupträume folgt die lineare Unabhängigkeit von (x,y,z) aus dem Hauptzerlegungslemma.

Zweites Argument (zu Fuß). Sei λ der Eigenwert zu x, sei μ der Eigenwert zu y, und sei ν der Eigenwert zu z. Sei $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ für ξ, η, $\zeta \in \mathbf{C}$. Wir haben zu zeigen, daß $\xi = \eta = \zeta = 0$. Aus $0 = A\cdot 0 = \xi Ax + \eta Ay + \zeta Az = \lambda\xi x + \mu\eta y + \nu\zeta z$ folgt nach Subtraktion von $0 = \lambda(\xi x + \eta y + \zeta z)$, daß $(\mu-\lambda)\eta y + (\nu-\lambda)\zeta z = 0$. Hieraus folgt nun wieder $\mu(\mu-\lambda)\eta y + \nu(\nu-\lambda)\zeta z = 0$ mit Multiplikation mit A, und folglich nach Subtraktion von $0 = \mu((\mu-\lambda)\eta y + (\nu-\lambda)\zeta z)$, daß $(\nu-\mu)(\nu-\lambda)\zeta z = 0$. Wegen $z \neq 0$, $\nu \neq \mu$ und $\nu \neq \lambda$ folgt $\zeta = 0$. Daher ist auch $(\mu-\lambda)\eta y = 0$. Wegen $y \neq 0$ und $\mu \neq \lambda$ folgt $\eta = 0$. Schließlich folgt aus $\xi x = 0$ mit $x \neq 0$, daß auch $\xi = 0$.

(4) Die Aussage ist richtig. Wir suchen eine Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ mit λ, $\mu \in \mathbf{C}$ mit $\lambda\mu = \xi$ und $\lambda + \mu = \eta$. Einsetzen liefert die zu erfüllende Bedingung $\lambda(\eta - \lambda) = \xi$, was z.B. auf die Lösung $\lambda = \eta/2 + \sqrt{\eta^2/4 + \xi}$, $\mu = \eta/2 - \sqrt{\eta^2/4 + \xi}$ führt. (In $\mathbf{C}$ ist das Wurzelziehen wegen algebraischer Abgeschlossenheit möglich. Oder: ist $z = r\exp(i\vartheta)$, so ist $\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\exp(i\vartheta/2)$, wobei man sich für $+$ oder für $-$ entscheiden kann.)

(5) Die Aussage ist richtig. Ist $\operatorname{rk} A = m < n$, so gibt es ein $x \in \mathbf{C}^n \smallsetminus \{0\}$ mit $Ax = 0 = 0\cdot x$. Demnach ist 0 ein Eigenwert von A. Ferner ist $\dim E_A(0) = \dim\operatorname{Kern}(A - 0E) = \dim\operatorname{Kern} A = n - \operatorname{rk} A = n - m$. Also ist die geometrische Vielfachheit von 0 gleich $n - m$.