M. Künzer, J. Marhenke

Lineare Algebra für Informatiker, WS 03/04

Ausführliche Beispiellösung zu Aufgabe 25 (1, 3)

(1) Wir lösen das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & & & = & 0 \end{array}$$

Mit der 3. Zeile säubert man die 1. Spalte.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Mit der 3. Zeile säubert man die 2. Spalte.

$$\begin{array}{rrrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

Mit der freien Variablen λ_4 erhalten wir als Lösungsmenge für $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$ die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} -\lambda_4 \\ -\lambda_4 \\ 3\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_4 \in \mathbf{R} \right\}$.
Damit ergibt sich

$$T \cap U \;=\; \left\{ (-\lambda_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\lambda_4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_4 \in \mathbf{R} \right\} \;=\; \left\{ \lambda_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_4 \in \mathbf{R} \right\} \;=\; \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \,.$$

Folglich ist $(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $T \cap U$. Eine Basis von $T + U$ ist gegeben durch $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, entsprechend den drei gebundenen Variablen λ_1, λ_2, λ_3. Die Summe $T + U$ ist nicht direkt.

(3) Wir lösen das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & & & & & = & 0 \\ \alpha\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \alpha\lambda_4 & + & \lambda_5 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & & & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & + & \lambda_5 & & & = & 0 \\ \alpha\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \alpha\lambda_4 & + & \lambda_5 & & & = & 0 \end{array}$$

Mit der 1. Zeile säubern wir die 1. Spalte.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & & & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & & & + & \lambda_5 & & & = & 0 \\ & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & + & \lambda_5 & & & = & 0 \end{array}$$

Mit der 2. Zeile säubern wir die 2. Spalte.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & & & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & & & + & \lambda_5 & & & = & 0 \\ & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = & 0 \\ & & & \alpha\lambda_3 & + & \lambda_4 & & & & & = & 0 \end{array}$$

Mit der 3. Zeile säubert man die 3. Spalte. Zusätzlich wird die resultierende 4. Zeile mit α durchmultipliziert.

$$\begin{array}{rrrcrcrcrcl} \lambda_1 & & & & & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & + & \alpha\lambda_4 & + & \alpha\lambda_5 & + & \alpha\lambda_6 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = & 0 \\ & & & & \lambda_4 & + & \lambda_5 & + & (1+\alpha)\lambda_6 & = & 0 \end{array}$$

Mit der 4. Zeile säubert man die 4. Spalte.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & & & + & \alpha\lambda_5 & + & \lambda_6 & = 0 \\
& \lambda_2 & & & & & + & (1+\alpha)\lambda_6 & = 0 \\
& & \lambda_3 & & + & (1+\alpha)\lambda_5 & + & \alpha\lambda_6 & = 0 \\
& & & \lambda_4 & + & \lambda_5 & + & (1+\alpha)\lambda_6 & = 0
\end{array}$$

Mit den 2 freien Variablen λ_5 und λ_6 erhalten wir als Lösungsmenge für $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\\\lambda_5\\\lambda_6\end{pmatrix}$ die Menge $\left\{ \begin{pmatrix}\alpha\lambda_5+\lambda_6\\(1+\alpha)\lambda_6\\(1+\alpha)\lambda_5+\alpha\lambda_6\\\lambda_5+(1+\alpha)\lambda_6\\\lambda_5\\\lambda_6\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_5,\lambda_6 \in \mathbf{F}_4 \right\}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
T\cap U &= \left\{ (\alpha\lambda_5+\lambda_6)\begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\\0\\\alpha\end{pmatrix} + (1+\alpha)\lambda_6\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + ((1+\alpha)\lambda_5+\alpha\lambda_6)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_5,\lambda_6\in\mathbf{F}_4 \right\} \\
&= \left\{ \lambda_5\begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\\alpha\\0\\1+\alpha\end{pmatrix} + \lambda_6\begin{pmatrix}1+\alpha\\1\\1\\1+\alpha\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_5,\,\lambda_6 \,\in\, \mathbf{F}_4 \right\} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\\alpha\\0\\1+\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+\alpha\\1\\1\\1+\alpha\\1\end{pmatrix} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Folglich ist das linear unabhängige Tupel $\left(\begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\\alpha\\0\\1+\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+\alpha\\1\\1\\1+\alpha\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $T\cap U$ (alternativ zu der auf dem Lösungszettel).

Eine Basis von $T+U$ ist z.B. gegeben durch $\left(\begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\\0\\\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\alpha\\0\\1\\\alpha\end{pmatrix}\right)$, entsprechend den vier gebundenen Variablen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Die Summe $T+U$ ist nicht direkt.