I. Bouw
F. Kiraly

**06.05.2008**
SS 2008

# Übungen zur elementaren Zahlentheorie - Blatt 4

Abgabe am 23.05.2008 bis 10:00 Uhr in den Briefkasten vor H3

**Aufgabe 13: Rechnen modulo n Teil 2 - déjà vu** (1+1+2+2 = 6 P)
Sei $n$ eine positive ganze Zahl, teilerfremd zu 12. Berechnen Sie (einen Repräsentanten im kanonischen/reduzierten Restesystem):

(a) $(n^9 + 11n + 2)(4n^6 + 8n^2 + 3)((6n)^4 + 7) \bmod 12$

(b) $3^{100} \bmod 73$

(c) die letzte Stelle von Googol im Heptadezimalsystem ( $10^{100} \bmod 17$ )

(d) die letzte Stelle von Googolplex im Heptadezimalsystem ( $10^{10^{100}} \bmod 17$ )

Tipp zu (a),(c) und (d): Benutzen Sie den Satz von Euler-Fermat.
Tipp zu (b): Sie können die schnelle Exponentiation benutzen.

**Aufgabe 14: Der Chinesische Restsatz** (LA: 0+2 = 2 P; IST: 2+2 = 4 P)

(a) Der Chinesische Restsatz findet sich erstmals im Standardwerk Sun Zi Suan Jing des chinesischen Mathematikers Sun Zi aus dem vierten Jahrhundert nach Christus (übrigens ein Namensvetter des Militärstrategen, manchmal auch Sun Tzu geschrieben). Der Überlieferung nach benutzten Chinesische Generäle den Restsatz, um die noch lebenden Soldaten nach geschlagener Schlacht zu zählen. Dazu ließen sie sie in Reihen zu je $n$ Soldaten antreten und zählten die übriggebliebenen Soldaten, bis das Produkt (d.h. kgV) der Zahlen die Anzahl der Soldaten vor der Schlacht überstieg.
Gegeben sei nun eine solche Schlacht, nach der ein General seine Soldaten antreten lässt. Als sich die Soldaten zu je 5, je 7 und zu je 11 aufstellen, bleiben 3 übrig, als sie sich zu je 6 aufstellen, bleibt keiner übrig. Falls es am Anfang 1200 Soldaten waren, wieviele sind während der Schlacht gefallen?

(b) Etwas mehr als zwei Jahrhunderte später taucht der Restsatz auch in den Büchern des indischen Mathematikers Brahmagupta auf. Eine Aufgabe aus dem Buch Brahmasphuta-Siddhanta lautet folgendermaßen (in Kurzfassung):
Eine Frau möchte auf dem Marktplatz Eier verkaufen. Unglücklicherweise trampelt ein Pferd auf dem Korb herum, in dem selbige liegen, und damit die Eier zu Brei. Der Reiter will der Frau die Eier natürlich bezahlen und fragt, wieviele es waren. Die Frau kann sich leider nicht mehr daran erinnern, aber sie weiß noch, welcher Rest übrigblieb, als sie die Eier zuhause spaßeshalber in Grüppchen eingeteilt hat. Bei 2-er-, 3-er-, 4-er-, 5-er-, 6-er und 7-er -Grüppchen waren das nämlich jeweils 1,2,3,4,5 und 0 Eier. Die Aufgabe die sich der Reiter nun stellt, ist selbstverständlich folgende: Was ist die kleinstmögliche (positive) Anzahl Eier, die im Korb gewesen sein könnten?

**Aufgabe 15: Die Eulersche $\varphi$ -Funktion** (LA: 1+2+2 = 5 P; IST: 1+2+0 = 3 P)

(a) Finden Sie alle Zahlen $n$ , sodass $\varphi(n) \leq 6$ . Zeigen Sie insbesondere, dass Sie alle gefunden haben.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine Zahl $n$ mit $\varphi(n) = 14$ .

(c) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung der Multiplikativität: Für ganze Zahlen $a, b$ ist

$$\varphi(ab) = \frac{\mathrm{ggT}(a,b)\varphi(a)\varphi(b)}{\varphi(\mathrm{ggT}(a,b))}.$$

**Aufgabe 16: Der Maya-Kalender** (1+1+1+2+2 = 7 P)

Die Maya hatten bereits in vorkolumbianischer Zeit profunde Kenntnisse von Astronomie und Mathematik. Daher verwundert es nicht, dass auch die Maya einen Kalender besaßen, der jedem Tag im Jahr einen eindeutigen Namen zuwies. Neben dem zivilen Haab-Kalender, der aus 18 Monaten zu je 20 Tagen bestand (zuzüglich 5 Unglückstagen, in denen die Tore zur Unterwelt sich öffneten) und wie unser gregorianischer Kalender funktioniert, gab es auch den sakralen Tzolk'in-Kalender, der einen Zyklus von 260 Tagen aufweist.

(a) Die Zykluslänge des Haab-Kalenders beträgt $365 = 20 \cdot 18 + 5$ Tage. Über welchen Zeitraum ist die Benennung der Tage simulan durch den Haab- und den Tzolk'in-Kalender eindeutig? Reicht das für ein Menschenleben?

(b) Zeigen Sie: Die Zykluslänge im gregorianischen Kalender für die Wochentage beträgt 400 Jahre. Mit anderen Worten, die Kombinationen aus Wochentag, Nummer des Tages und Monatsname wiederholen sich alle 400 Jahre. Tipp: Benutzen Sie dazu die Datumsformel. Sie müssen nicht zeigen, dass diese Länge tatsächlich minimal ist (ist sie aber).

(c) Nach welcher Zykluslänge wiederholen sich die Daten des gregorianischen und des Haab-Tzolk'in-Kalenders zusammengenommen, d.h. die Kombinationen von gregorianischen und Maya- Namen und -Nummern für Tage und Monate (z.B. Freitag, der 13. September, Muluc der 8.)?

Der Tzolk'in Kalender funktioniert wesentlich anders als unser Kalender. Jeder Tag trägt hier einen Namen und eine Zahl. Die Zahl ist eine ganze Zahl zwischen 1 und 13, die zwanzig Namen folgen aufeinander in einer festen Reihenfolge, die in der folgenden Tabelle aufgelistet ist:

**Tage des Tzolk'in**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Imix | 6. | Cimi | 11. | Chwen | 16. | Cib |
| 2. | Ik | 7. | Manik | 12. | Eb | 17. | Caban |
| 3. | Akbal | 8. | Lamat | 13. | Ben | 18. | Etznab |
| 4. | Kan | 9. | Muluc | 14. | Ix | 19. | Cawac |
| 5. | Chicchan | 10. | Oc | 15. | Men | 20. | Ahaw |

Ist $(s, t)$ jetzt die Nummer in dieser Abzählung, folgt nicht wie in unserem Kalender der Tag $(s, t+1)$ (mit Übertrag) auf den Tag $(s, t)$, sondern der Tag $(s+1, t+1)$ gerechnet modulo $(13, 20)$. Das heißt, man hat zwei Zähler, die unabgängig voneinander erhöht werden. Da 13 und 20 teilerfremd sind, hat man eine Bijektion auf das kanonische Restesystem modulo 260.
Auf Eb, den 7., folgt also Ben, der 8. Auf Ahaw, den 13., folgt Imix, der 1.

(d) Berechnen Sie mit dem Chinesischen Restsatz den Abstand zwischen Eb, dem 9. und Ix, dem 12. in Tagen. Erläutern Sie, wie das allgemein geht.

Neben der Bezeichung für die einzelnen Tage hatten die Maya auch ein System, um Zeitabstände zu messen. Im Maya-Kalender sind 20 Tage ein Winal, 18 Winal ein Tun, 20 Tun ein Katun und 20 Katun ein Baktun. Ein Baktun bildet einen sogenannten langen Zyklus. Die absolute Zählung in diesem System beginnt am 11. August 3114 vor Christus nach dem Gregorianischen Kalender und wird von Maya-Wissenschaftlern nach dem Schema Baktun.Katun.Tun.Winal.Tage notiert. So ist der 2. September 3114 v.Chr. z.B. der Tag mit der Darstellung 0.0.0.1.2.

(e) Die Zyklenlänge des Gregorianischen Kalenders beträgt 400 Jahre, das sind (im Kalender, ohne Schaltsekunden etc) 146097 Tage. Zeigen Sie, dass ein langer Zyklus des Maya-Kalenders am 21. Dezember 2012 endet.

Entgegen den Behauptungen der Weltuntergangspropheten endet kein Zyklus des Haab-Tzolk'in-Kalenders am 21.12.2012 (was den Tag zu etwas besonderem machen würde), da der Haab-Kalender eine Periode von 365 und nicht von 360 Tagen hat.