Programm des Hauptseminars *Symmetrie*

Prof. Dr. Irene Bouw
Universität Ulm
Institut für Reine Mathematik
SS 2008
irene.bouw at uni-ulm.de

Vortrag 1: Einführung (2 Personen)
Dieser Vortrag soll eine Einführung in die Theorie der Symmetrie und in die Gruppentheorie geben.

- Einführung in das Thema des Seminars: Was ist Symmetrie? Geben Sie Beispiele.
- Definition von Gruppe, Untergruppe, Gruppenhomomorphismus.
  Beispiele: zyklische Gruppen, Diedergruppe (die Symmetriegruppe des regelmäßige n-Gons), A_4 (die Symmetriegruppe des Tetraeders),...
- Definition von Gruppenwirkung, Bahn, Stabilisator. Der Bahn-Stabilisator-Satz. Symmetriegruppen als Permutationsgruppen (mit Beispielen).

Literatur: Armstrong, Kapitel 1,2,4,17. Artin, § 5.5, § 5.7. Knörrer, § 1.2. Skript Algebra.

Vortrag 2: Der Satz von Burnside
Mit Hilfe des Satzes von Burnside kann man z.B. die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten bestimmen, um die Seiten eines Würfels mit 3 Farben anzumalen. Dieser Satz findet auch Anwendung in der Chemie.

- Formulieren und beweisen Sie den Satz von Burnside (auch bekannt als Polyas Satz).
- Geben Sie viele Beispiele; z.B. zählen Sie die Anzahl der nicht-äquivalenten Moleküle mit vorgegebenen Atomen.

Literatur: Armstrong, Kapitel 18. Hill § 20.
Vorkenntnisse: Algebra I (Gruppenwirkung und Beispiele von Gruppen) oder Vortrag 1.

Vortrag 3: Die Euklidische Gruppe
Dieser Vortrag befasst sich mit den Symmetrieoperationen der Ebene und des Raumes.

- Isometrien, Drehungen, Spiegelungen, Drehspiegelungen, Translationen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Geben Sie Definitionen und Beispiele an. Erklären Sie den Zusammenhang zur Gruppe der orthogonalen Matrizen.

- Beschreiben Sie die Isometrien der Ebene und des Raumes. Unterscheiden Sie zwischen Isometrien mit und ohne Fixpunkt.

Literatur: Artin, § 5.2 (Satz 2.2). Knörrer § 1.1, Satz 1.1, Satz 1.2, Bemerkung 4.
Vorkenntnisse: Lineare Algebra.

Vortrag 4: Die endlichen Untergruppen von SO_3 (2 Personen)
In diesem Vortrag werden die endlichen Symmetriegruppen studiert.

- Bestimmen Sie die endlichen Untergruppen von SO_3 (die endlichen Drehungsgruppen). Dies sind die Rosettengruppen und die Symmetriegruppen der Platonischen Körper.

- Erklären Sie auch, wie diese Gruppen als Symmetriegruppen auftreten. Die Rosettengruppen treten z.B. als Symmetriegruppen von Rosetten in Romanische oder Gotische Kirchen auf oder als Symmetriegruppen von Blüten (siehe z.B. Quaisser, § 4.1). Die Symmetriegruppen der Platonische Körper treten z.B. als Symmetriegruppen von Molekülen auf. Besprechen Sie einige dieser Beispiele im Detail.

- Falls Zeit noch bleibt, so könnten Sie auch etwas über Anwendungen in der Chemie sagen (Belger–Ehrenberg, § 5.4). Hier betrachtet man auch die sogenannten erweiterten Symmetriegruppen oder Punktsymmetriegruppen 2ter Art.

Literatur: Artin, § 5.9. Armstrong, Kapitel 19. Knörrer, § 1.3. Die Symmetriegruppe des Icosaeders: Armstrong, Seite 40. Artin, Seite 227. Knörrer, Seite 46. Molekülbeispiele: Belger–Ehrenberg, Kapitel 2.
Vorkenntnisse: Gruppenwirkung, Bahn-Stabilisator-Satz (Vortrag 1, oder Algebra I), Vortrag 3 (einige Definitionen).

Vortrag 5: Gitter und Punktgruppen
In diesem und dem nächsten Vortrag geht es nun um unendliche Symmetriegruppen, wie z.B. die Symmetriegruppen von Parkettmuster oder Kristallen.

- Diskutieren Sie ein Paar einführende Beispiele.

- Definieren Sie die ebenen kristallographischen Gruppen (Parkettmustergruppen) und deren Translationsuntergruppe T und Punktgruppe J.

- Sei $T = \{t_a\}$ die Translationsgruppe einer ebene kristallographische Gruppe. Zeigen Sie, dass $\Lambda = \{a \in \mathbb{R}^2 \,|\, t_a \in T\}$ ein Gitter bildet. Beschreiben Sie eine Gitterbasis. Klassifizieren Sie die 5 vorkommenden Gittertypen.

- Zeigen Sie, dass die Punktgruppe J auf Λ wirkt. Beweisen Sie die kristallographische Einschränkung: Jede nicht-triviale Drehung $\rho \in J$ hat Ordnung $2, 3, 4$ oder 6.

Literatur: Armstrong, Kapitel 25. Artin § 5.4.
Vorkenntnisse: Einige Definitionen aus Vortrag 1 und 3 (oder Knörrer, Satz 1.1 und Bemerkung 4 von Seite 15).

Vortrag 6: Die 17 **ebenen kristallografischen Gruppen** (2 Personen)
In diesem Vortrag werden die ebenen kristallografischen Gruppen (oder: Parkettmustergruppen, in Englisch: wallpaper group) klassifiziert.

- Beweisen Sie den Klassifikationssatz. Sie brauchen nicht alle Teilfälle durchdiskutieren; stattdessen sollten Sie die wichtigsten Ideen des Beweises betonen.

- Erklären Sie an Hand von konkreten Beispielen wie die Klassifikation in der Praxis funktioniert.

  Die Web-Seite http://www.spsu.edu/math/tile/grammar/index.htm hat viele schöne Muster und eine hilfreiche Anleitung zur Klassifikation. (Siehe auch Quaisser, § 5.4.) Eine andere gute Quelle ist die offizielle Escher-Webseite http://www.mcescher.com/

- Geben Sie eine kurze Einleitung in der Theorie der 3-dimensionalen kristallographischen Gruppen (die Raumgruppen). Die Betonung sollte hier auf konkrete Beispiele liegen. Es reicht, wenn die Ergebnisse kurz angedeutet werden.

Literatur: Klassifikation der ebenen kristallographischen Gruppen: Armstrong, Kapitel 26. Quaisser, Kapitel 5. Historische Bemerkungen stehen in Quaisser, Seite 90–91. Die Raumgruppen werden diskutiert in Quaisser, § 6.3.
Vorkenntnisse: Vortrag 5, einige Begriffe aus Vortrag 3 (Drehungen, Translation usw.)

Vortrag 7: Molekulvibration (Sabine Bayer/Bettina Molfenter)
In diesem Vortrag besprechen wir eine Anwendung der Gruppentheorie in der Chemie.

- Geben Sie eine kurze Einführung in die Theorie der Molekulvibrationen und in die Theorie der normalen Zustände.

- Geben Sie eine kurze Einleitung in die Darstellungstheorie. Konzentrieren Sie sich hierbei auf konkrete Beispiele. Definieren Sie Darstellungen und irreduzible Darstellungen. Erklären Sie in einem Beispiel wie man eine Darstellung in irreduzibele Darstellungen zerlegt.

- Erklären Sie wie man die normalen Zustände mit Hilfe der Darstellungstheorie bestimmen kann.

Literatur: Eine Einführung in die Darstellungstheorie finden Sie z.B. in Artin, § 9.1, 9.4, 9.5 oder in Hill, Part 2 und 3. Die Anwendungen in der Chemie werden z.B. in Burns, Kapitel 5 erklärt.

Vortrag 8: Die Spingruppe
In diesem Vortrag besprechen wir eine Anwendung der Gruppentheorie in der Physik.

- Geben Sie eine kurze Einführung in das Konzept des Spins und die Rolle des Spins in der Quantenmechanik.

- Definieren Sie die Gruppe SU_2 der speziellen unitären Matrizen.

- Erklären Sie, dass die Gruppe SU_2 isomorph zur 3-Kugel ist (Artin § 8.2).

- Beweisen Sie Satz 3.5 aus Artin, § 8.3. Erklären Sie, wieso die Gruppe SU_2 die Spingruppe genannt wird.

Literatur: Artin, §§ 8.2-8.3. Hill, Kapitel 19.
Vorkenntnisse: Vortrag 3, lineare Algebra.

Literatur:

1. M. Armstrong, *Groups and symmetry.* Springer, 1988.

2. M. Artin, *Algebra.* Birkhäuser, 1993.

3. M. Belger, L. Ehrenberg, *Theorie und Anwendungen der Symmetriegruppen.* Verlag Harri Deutsch, 1981.

4. G. Burns, *Introduction to group theory with applications.* Academic Press, 1977.

5. H. Coxeter, *Introduction to geometry*. Wiley, 1969.

6. V. Hill, *Groups, representation, and characters*. Hafner Press, 1975.

7. H. Knörrer, *Geometrie*. Vieweg, 2006.

8. W. Ledermann, S. Vadja (eds.), *Handbook of applicable mathematics, Vol 5B: Combinatorics and geometry*. Wiley, 1985.

9. E. Quaisser, *Diskrete Geometrie*. Spektrum, 1994.