# Programm des Hauptseminars Algebra:

*Das Auflösen von Gleichungen früher und heute*

Prof. Dr. Irene Bouw
Universität Ulm
Institut für Reine Mathematik
SS 2009
irene.bouw at uni-ulm.de

**Vortrag 1: Quadratische Gleichungen in der babylonischen Mathematik**

In der babylonischen Mathematik wurde schon circa 1600 v. Chr. quadratische Gleichungen gelöst. Ziel dieses Vortrags ist es zu erklären, wie man damals quadratische Gleichungen löste. Wichtig ist es auch, eine Einsicht zu bekommen mit welcher Motivation man damals Mathematik betrieben hat und wie sich dies mit unserer Auffassung von Mathematik als Wissenschaft verhält.

- Erklären Sie das Sexagesimalsystem und die Grundrechenformen, [22, § 1.2], [17, Babylonian mathematics].
- Erklären Sie an Hand eines Beispiel, wie man damals quadratische Gleichungen löste [22, § 1.3, 1.5]. Siehe auch [14, § 1.1].
- Erklären Sie auch das Beispiel aus [22, § 1.6] woraus hervorgeht, dass man damals die Aussage der Satz von Pythagoras schon kannte. Siehe auch die entsprechende Seite in [17].

Weitere Quelle: [2, §1.3].

**Vortrag 2: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**

Jeder kennt einige griechische Mathematiker. Einige der Probleme, an denen sie gearbeitet haben gehören immer noch zum Standard Schul- oder Uni-Stoff. Aber was wissen wir eigentlich darüber, wie die griechischen Mathematiker gearbeitet und gelehrt haben?

- Erklären Sie das Problem der Konstruktion mit Zirkel und Lineal in moderner Sprache, [6] oder [3], ggf. auch [8].
- Bestimmen Sie, welche regulären $n$-Ecke man mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren kann. Erklären Sie auch den Zusammenhang mit Fermat-Primzahlen [23, Chapter 17], [9, § III.6.5]. Benutzen Sie hier moderne Sprache.

- Falls Zeit bleibt, erzählen Sie wie Mathematik im alten Griechenland gelehrt wurde oder was wir über griechische Mathematiker und deren Mathematik wissen [17, Ancient Greek mathematics].

**Vortrag 3: Die arabisch-islamische Algebra**

Unser Wort Algebra findet seinen Ursprung im arabischen Begriff *al-jabr*. Viele klassische griechische Texte sind nur überliefert weil Sie in der arabischen Welt rechtzeitig abgeschrieben wurden. Wer waren diese Mathematiker?

- Geben Sie eine kurze Einführung in die historische Periode und einige der wichtigsten Mathematiker, zum Beispiel al-Khwarizmi und Omar Khayyam [17, Arabic/Islamic mathematics], [24], [18].
- Erklären Sie die wichtigsten Rechenarten al-jabr, al-muqabala und al-radd. Geben Sie auch Beispiele [22, § 4.3], [24, § 1.A.2].
- Erklären Sie die Beweise der *Mitternachtsformel* (pq-Formel) [22, § 4.3], [24, § 1.A.6, 1.B.4].
- Erklären Sie Omar Khayyams Lösung von Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades mit Hilfe von Kegelschnitten [22, § 4.4], [17, Additional Material zu Khayyam].

Weitere Quelle: [2, §3.3].

**Vortrag 4: Diophantische Gleichungen**

- Welche Art von Problemen betrachtete Diophant in seiner "Arithmetica"? Geben Sie Beispiele für seine Lösungsmethoden. [25, 4.A], [22, §3]
- Stellen Sie dar, inwieweit Diophant bereits algebraische Notation benutzte.
- Was verstehen wir heute unter diophantischen Gleichungen? [25, 5]
- Stellen Sie die Pell'sche Gleichung als Spezialfall von Diophantischen Gleichungen vor. Wie haben die Griechen diese behandelt? Beschreiben Sie detailliert den Spezialfall $D = 2$. [25, 5.B]
- Erklären Sie das "Rinderproblem" des Archimedes, und was es mit diophantischen Gleichungen zu tun hat. [22, 2.4], [12].

Weitere Quelle: [2, §2.6]. Für umfangreiche weiterführende Literatur siehe auch [13].

**Vortrag 5: Chinesische Mathematik**

1. Erläutern Sie die Darstellung der Zahlen bei den Chinesen und die Verwendung von Rechenbrettern. [27, 1.1 – 1.2]

2. Worum geht es in den *Neun Büchern*? Welchen Zweck hatten Sie? [11, §3.1], [27, 2.2].

3. Wie hat man damals mit dem Rechenbrett Quadrat- und Kubikwurzeln berechnet? Erklären Sie in diesem Zusammenhang die Probleme aus Buch 9, speziell Problem 20. [26], [27, 2.2.4]

4. Sagen Sie noch etwas zu Buch 8.

Weitere Quelle: [2, §3.1].

**Vortrag 6: Gleichungen 3-ten und 4-ten Grades**

Verrat, Poesie und verlorene Wettbewerbe: Diese Geschichte zeigt die Mathematik von einer ganz anderen Seite.

- Stellen Sie Scipione dal Ferro, Tartaglia, Cardano und Ferrari und deren Beitrag zur Auflösung von Gleichungen vor [17, Quadratic, cubic, quartic equations] und weitere MacTutor-Seiten. Zeigen Sie auch an Hand eines Beispiel, wie die Mathematik damals aufgeschrieben wurde.

- Erkären Sie Cardanos Beweis der Formel für die Auflösbarkeit von Gleichungen 3-ten Grades [22, § 6.2–5]. Erklären Sie eventuell auch einige ältere Ansätze [22, § 6.1].

- Diskutieren sie die Probleme der Formel: Ganze Lösungen sind nicht immer leicht erkennbar. Manchmal braucht man komplexe Zahlen, um reelle Lösungen zu beschreiben. Wie ging Cardano hiermit um? (Siehe auch [22, § 6.7]).

- Falls Zeit bleibt, diskutieren Sie auch Ferraris Beitrag zu Gleichungen 4-ten Grades [22, § 6.6].

Weitere Quellen: [2, §5.1], [24, Part C].

**Vortrag 7: Descartes und der moderne Zahlbegriff**

Wir kennen alle die kartesischen Koordinaten, aber was war Descartes' Beitrag wirklich?

- Diskutieren Sie die Beziehung zwischen Zahlen und Längen, den griechischen Zahlbegriff und die Neuerungen von Descartes [22, § 7.9], [5]. (Siehe auch [24, § 3.4] und [14, § 1.6–1.8].)
- Illustrieren Sie an Hand der Beispiele in [22, § 7.8] wie Descartes Variablen und Koordinaten einführte.
- Die Biographie von Descartes finden Sie zum Beispiel in [17].
- Es empfiehlt sich ggf., auch das Originalwerk Descartes' zu studieren [8].

Weitere Quelle: [2, §5.2].

**Vortrag 8: Geschichte der Gruppendefinition**

Während des Studiums fallen abstrakte Definitionen oft aus der Luft. In diesem Vortrag soll an Hand der Definition einer Gruppe gezeigt werden, dass abstrakte Definitionen oft von konkreten Beispielen motiviert sind und mehrere Anläufe gebraucht werden bis die endgültige Definition gefunden ist. Literatur: [17, History of group theory], [22, § 11.3–5] (nicht: elliptische Funktionen), [15], [14, § 2], [24, § 8.A.1, 8.A.3, 8.C (Auswahl)].

- Erklären Sie, wie Beispiele von Permutationsgruppen und Gruppen von Transformationen in der Analysis bekannt waren, bevor es die Definition einer Gruppe gab [2, §7.1–2], [15], [22, § 11.3–4].
- Erklären Sie wie abelsche Gruppen auch in der Zahlentheorie vorkommen, zum Beispiel als Einheitengruppe eines Zahlkörpers [7], [15, § 2b].
- Erklären Sie wie aus diesen sehr verschiedenen Strukturen der abstrakte Gruppenbegriff entstanden ist.

**Vortrag 9: Galois-Theorie und Gleichungen 3-ten Grades**

In diesem Vortrag geht es darum die moderne Herangehensweise an Gleichungen zu vergleichen mit den klassischen Ansätzen. Wie viel Fortschritt haben wir wirklich gemacht?

- Geben Sie einen Überblick über die Hauptergebnisse der Galois-Theorie: Die Galois-Gruppe eines Polynoms, Hauptsatz der Galois-Theorie [6], [4], [2, §7.1, §8.1]. [3]. Geben Sie auch Beispiele.
- Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom von Grad 3. Charakterisieren Sie die Galois-Gruppe $G(f)$ von $f$ mit Hilfe der Diskriminante oder der Resolvente [3, § 14.2], [9, § III.3.10–11], [9, § III.5.2–3]. Vergleichen Sie Ihren Ansatz mit Cardanos Ansatz [9, § III.5.3], [22, § 6.2].

**Vortrag 10: Gleichungen 4-ten Grades und die kubische Resolvente**
Dieser Vortrag ist eine Erweiterung der Ergebnisse von Vortrag 7 auf Polynome 4. Grades.

- Welche transitiven Untergruppen von $S_4$ gibt es?
- Charakterisieren Sie die Galois-Gruppe eines Polynoms 4. Grades über die kubische Resolvente.

Quellen: [28], [3, §14.6], [9, III.5.4]

**Vortrag 11: Auflösbarkeit mit Hilfe von Radikalen**
Nach 2500 Jahren wurde das Problem endlich gelöst!

- Formulieren Sie das Problem der Auflösbarkeit von Gleichungen mit Hilfe von Radikalen.
- Zeigen Sie, dass es Polynome von Grad 5 gibt, die nicht mit Hilfe von Radikalen auflösbar sind (in moderner Sprache). [23, Chapter 14, 15], [9, § III.5.12], [6].
- Der Satz wurde von Abel und Ruffini gezeigt ohne Benutzung der Galois-Theorie [1], [22, § 14.2], [20]

**Vortrag 12: Das Leben und Werk von Galois**
Die romantischste Geschichte der Mathematik....

- Diskutieren Sie die Biographie von Galois und wie er zum Mythos wurde [17, Galois], [22, § 14.3], [21], [19].
- Diskutieren Sie wie die modernen Begriffe wie zum Beispiel Körpererweiterung, Galois-Gruppe, Normalteiler, endliche Körper im Werk von Galois vorkommen [22, § 14.3], [16], [2, §7.1.2]. Benutzen Sie falls möglich die Originalarbeiten von Galois [10].

# Literaturverzeichnis


[1] N.H. Abel, Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen. *Crelle*.

[2] H.-W. Alten, A. Djafari Naini et al., *4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer-Verlag, 2005.

[3] M. Artin, *Algebra*.

[4] J. Bewersdorff, *Algebra für Einsteiger*.

[5] HJM Bos, The structure of Descartes' la géométrie. In: *Lectures on the history of mathematics*. Steht zur Verfügung auf *google books*.

[6] I.I. Bouw, *Algebra I*, Vorlesungsskript, WS 2008/2009.

[7] I.I. Bouw, *Elementare Zahlentheorie*, Vorlesungsskript, SoSe 2008.

[8] R. Descartes, *La Géometrie*.

[9] G. Fischer, *Lehrbuch der Algebra*.

[10] E. Galois, *Oevres*.

[11] H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*.

[12] W.-D. Geyer, *Das Rinderproblem des Archimedes*.

[13] T. L. Heath, *The History of Greek Mathematics*.

[14] I, Kleiner, *A history of abstract algebra*.

[15] I. Kleiner, *The evolution of group theory: A brief survey*.

[16] S. Lie, *Influence de Galois sur le Développement des Mathématiques*.

[17] The MacTutor history of mathematics archive, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history`

[18] K. H. Parshall, *The art of algebra from al-Khwarizmi to Viete: A study in the natural selection of ideas.*

[19] J. Pierpont, *Early History of Galois' Theory of Equations.*

[20] J. Pierpont, *Zur Geschichte der Gleichung des V.ten Grades (bis 1858).*

[21] T. Rothman, Genius and biographers: the fictionalization of Evariste Galois.

[22] E. Scholz (hrsg.), *Geschichte der Algebra.*

[23] I. Stewart, *Galois theory.*

[24] B.L. van der Waerden, *A history of algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether.*

[25] B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.*

[26] K. Vogel, *Neun Bücher arithmetischer Technik*

[27] L. Yan, D. Shiran, *Chinese Mathematics - A Concise History.*

[28] S. Wewers, *Skript Galois-Theorie*