Programm des Proseminar über Zahlen

PD Dr. Irene Bouw
Universität Ulm
Abteilung Reine Mathematik
WS 2006/2007
bouw@math.uni-duesseldorf.de

Vortrag 1: Die natürlichen Zahlen

- Eine kurze Einführung in die Geschichte unseres Zahlensystems. Die Einführung der Null. (Ebbinghaus, §1.1, MacTutor: “A history of zero”, “Indian numerals”, “The Arabic numeral system”)
- Die mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion. Die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen. (Ebbinghaus, §1.2)
- Die Definition der ganzen und rationalen Zahlen (falls Zeit bleibt). (Ebbinghaus, §1.3)

Vortrag 2: Die reelle Zahlen

- Erklären Sie die geometrische Sichtweise der Griechen auf die reellen Zahlen (Ebbinghaus, §2.1.1).
- Dedekindsche Schnitte. (Ebbinghaus, §2.2)
- Die Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Cauchy-Folgen; kurze Wiederholung aus der Analysis. (Eberhaus, §2.3, Script Analyses I).
- Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen und deren Vollständigkeit. (Ebinghaus, §2.5.3)

Vortrag 3: Die komplexen Zahlen

- Die Geschichte der komplexen Zahlen und der Hauptsatz der Algebra. (Ebbinghaus, §3.1, §4.1, MacTutor: “The fundamental theorem of algebra” und “Quadratic, cubic, quartic equations”)
- Die Existenz von n-ten Wurzeln und Polarkoordinaten. (Ebbinghaus, §3.3.5, 3.3.6, §3.6)

Vortrag 4: Der Fundamentalsatz der Algebra

- Erklären Sie die Aussage und den Zusammenhang zwischen folgenden Sätzen: Der Fundamentalsatz, Abspalten von Faktoren, die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen. (Ebbinghaus, §4.3)
- Analytischer Beweis des Hauptsatzes. (Ebbinghaus, §4.2)
- Die Eindeutigkeit der komplexen Zahlen. (Ebbinghaus, §4.3.6)

Vortrag 5: π

- Die Geschichte von π. Erklären Sie klassische Abschätzung für π mit Hilfe von regulären n-Ecken. (Ebbinghaus, §5.1.3, MacTutor: "A history of Pi")
- Beweisen Sie die Leibnizsche Reihe für π. Beweisen Sie auch die Eulerschen Formeln für π. Sagen Sie auch etwas zur Konvergenz. (Ebbinghaus, §5.4.1, 5.4.3, 5.4.4)
- Beweis der Irrationalität von π. (Ebbinghaus, §5.4.6, siehe auch Steward, Theoren 6.2 und 6.3)

Vortrag 6: Algebraische und transzendente Zahlen

- Definition von algebraischen und transzendenten Zahlen (Steward, §5.1, Script Algebra §3.2).
- Beispiele von algebraischen Zahlen: Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$, so dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eine Nullstelle von f ist.
- Zeigen Sie, dass e eine transzendente Zahl ist.
- Falls noch Zeit bleibt, erzählen Sie etwas zur Geschichte von e (MacTutor: "The history of e").

Vortrag 7: Konstruktion mit Zirkel und Lineal

- Erklären Sie das Problem und geben Sie einige konkrete Beispiele. (Steward, Chapter 7 bis Theorem 7.4)
- Erklären Sie die Quadratur des Kreises und weitere klassische Probleme. (Steward Chapter 7, MacTutor: Squaring the circle, doubling the cube, trisecting the angle)

- Zeigen Sie, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist. (Steward, Theorem 7.7)

Vortrag 8: Dezimalbrüche

- Definieren Sie die b-adische Darstellung von Zahlen (also die Verallgemeinerung der Dezimalbruchentwicklung zu einer beliebigen Zahlenbasis b. Geben Sie auch einige Beispiele an. (Rosen, Chapter 12.1)
- Zeigen Sie dass jede reelle Zahl eine b-adische Darstellung besitzt und charakterisieren Sie die rationalen Zahlen mit Hilfe der b-adische Darstellung. (Rosen, Chapter 12.1)
- Definieren Sie abzählbare und überabzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, aber $\mathbb{R}$ nicht. (Script Analysis, Rosen Theorem 12.6)

Vortrag 9: Die p-adische Zahlen

- Definieren Sie $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Q}_p$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Ring ist und dass $\mathbb{Q}_p$ ein Körper ist. Definieren Sie die Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$. (Ebbinghaus, §6.1 ab die Mitte von Seite 127). (Die Darstellung als projektiver Limes brauchen Sie nicht zu machen.)
- Geben Sie konkrete Beispiele. Beweisen Sie Satz 3 (Ebbinghaus) (dies wurde schon in dem vorhergehenden Vortrag vorbereitet!)
- Definieren Sie die p-adische Zahlen auch mit Hilfe von Cauchy-Folgen und zeigen Sie, dass man die gleiche Definition erhält. (Ebbinghaus, §6.3)

Vortrag 10: Kettenbrüche I

- Das euklidische Algorithmus und die Darstelung rationales Zahlen als endliche Kettenbruch (Rosen, Theorem 12.7 und 12.8). Eine gute Quelle ist auch das Wikipedia-Artikel über Kettenbrüche). Beispiele. (Rosen, §12.2). Definieren Sie auch die Zahlen C_k (Rosen, Seite 445).
- Unendliche Kettenbrüche (Rosen §12.3). Illustrieren Sie dass sich jede reelle Zahl als unendliche Kettenbruch darstellen lässt (Rosen, Theorem 12.15; Theorem 12.13 brauchen Sie nicht zu beweisen). Zum Beispiel reicht es wenn Sie den Algorithmus aus dem Beweis von Theorem 12.15

in einem Spezialfall ausführen. Gute Beispiele sind $\sqrt{6}$ (Rosen, Example 12.10), π (erste Paar Koeffizienten; Rosen, Example 12.11). Siehe auch Exercise 12.3.1. Falls genug Zeit bleibt erklären Sie auch die Aussage von Theorem 12.14 und 12.19 (ohne Beweis).

- Hier finden Sie eine Taschenrechner für Kettenbrüche : `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfCALC.html`

Vortrag 11: Kettenbrüche II

- Definieren Sie periodische Kettenbrüche (Rosen, §12.4).
- Definieren Sie irrationale Quadratzahlen und geben Sie einige Beispiele. Diefinieren Sie auch der konjugierte Quadratzahl und beweisen Sie Lemma 12.3.
- Erklären Sie die Aussage von Rosen, Theorem 12.19 (ohne Beweis).
- Beweisen Sie Rosen, Theorem 12.20. (Theorem 12.15 ist in Vortrag 10 erklärt und Sie brauchen also nur die Aussage zu wiederholen.) Geben Sie auch Beispiele.

Vortrag 12: Die Quaternionen

- Definieren Sie die Quaternionen. Erklären Sie die Rechenregeln. Geben Sie auch einige konkrete Beispiele. (Ebbinghaus, §7.1)
- Geben Sie die alternative Definition mit Hilfe von Matrizen. Zeigen Sie, dass die Quaternionen einen Schiefkörper formen (oder was das gleiche bedeutet: Eine assoziative Divisionsalgebra). (Ebbinghaus, §7.2)
- Erzählen Sie etwas zu Hamilton und die Erfindung der Quaternionen. (Ebbinghaus §7 Einleitung, MacTutor: W. R. Hamilton)

Literatur:

1. H.-D. Ebbinghaus et. al, *Zahlen*, 3te Auflage, Springer-Lehrbuch 1992.
2. The MacTutor history of mathematics archive, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼ history/Indexes/Hist_Topics_alph.html
3. I. Stewart, *Galois theory*, Chapman and Hall, 2004.
4. K. Rosen, *Elementary number theory and its applications*, 5th edition, Addison-Wesley, 2004.