15.10.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 1

Die Übungsblätter werden immer Mittwochs in der Vorlesung ausgeteilt, können aber auch im Internet unter *http://www.mathematik.uni-ulm.de/ReineMath/mitarbeiter/bouw/ws08/algebra.html* heruntergeladen werden. Die Abgabe ist dann der darauf folgende Mittwoch vor der Vorlesung. Für dieses Übungsblatt also **Mittwoch, der 22.10.2008** und am darauf folgenden Montag um 14 c.t. findet dann die dazugehörige Übung statt. Erstmals am Montag, den 27.10.2008. Der Raum wird noch bekannt gegeben.
Die bearbeiteten Aufgaben sind zu zweit abzugeben!
Einen guten Start ins Semester und viel Spaß bei den Übungen!

Aufgabe 1: Gruppen (2+2+2+2)
Formen folgende Mengen mit den genannten Verknüpfungen eine Gruppe? Wenn ja, sind die Gruppen abelsch? Begründung.

(a) Sei $G := (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ die Menge aller $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit der Verknüpfung $i *_G j = ij \mod 5$ (siehe unten). Beantworten Sie obige Fragen für $(G, *_G)$.

(b) Sei $G := (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ die Menge aller $i \in \{1, 2, 3\}$ mit der Verknüpfung $i *_G j = ij \mod 4$ (siehe unten). Beantworten Sie obige Fragen für $(G, *_G)$.

(c) Seien G_1 und G_2 Gruppen. Betrachten Sie nun das Produkt $G := G_1 \times G_2$ der Gruppen zusammen mit der komponentenweisen Multiplikation $(g_1, g_2) * (g_1', g_2') := (g_1 * g_1', g_2 * g_2')$. Beantworten Sie obige Fragen für $(G, *)$ in Abhängigkeit der G_i.

(d) Sei G die Menge aller Matrizen $\begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ und der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung. Ist dies eine Gruppe? Ist dies eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ der Menge der invertierbaren Matrizen?

Aufgabe 2: Symmetriegruppe des Tetraeders (1+2+1+2)
Sei T ein regelmäßiger Tetraeder mit Ecken $1, 2, 3, 4$ mit den Rotationen r und s wie unten.

(a) Argumentieren Sie, dass die Menge der Rotationssymmetrien R zusammen mit der Verknüpfung der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet.

(b) Argumentieren Sie, dass R von $r \in R$ und $s \in R$ wie unten erzeugt wird. Schreiben Sie dabei alle Elemente als Produkt von R in Termen von r und s.

(c) Was ist die Ordnung von R? Bestimmen Sie die Ordnung von r und s.

(d) Beweisen Sie, dass $r^{-1} = rr$, $s^{-1} = s$, $(rs)^{-1} = srr$ und $(sr)^{-1} = rrs$ gilt.

Aufgabe 3: Idempotente Elemente (2+2)
Sei G eine Gruppe mittels Multiplikation und Einselement e. Sei $x \in G$.

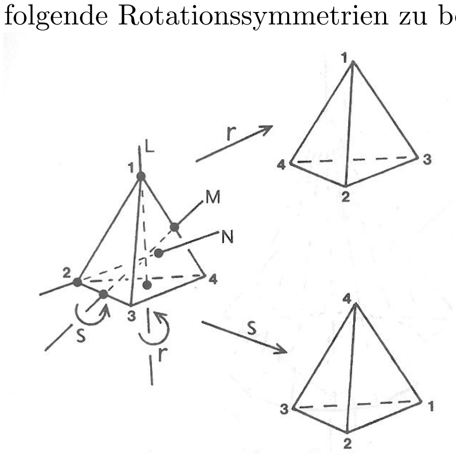
(a) Zeigen Sie, dass $x^2 = e$ genau dann gilt wenn $x = x^{-1}$. Man nennt solche Elemente *idempotent*.

(b) Folgern Sie aus (a), dass eine Gruppe gerader Ordnung (keine oder) eine ungerade Anzahl an Elementen der Ordnung 2 besitzen muss.

Bemerkungen

1. Sei $G := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{1, .., n-1\}$. Seien $a, b \in G$. Die Verknüpfung $*_G : G \times G \to G$ schickt $(a, b) \mapsto r$, wobei $r \in G$ die Zahl ist so, dass $ab = r + kn$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Man schreibt $r = ab \mod n$.
   Diese Zahl existiert wegen der Division mit Rest. Die Zahl ist eindeutig, denn angenommen existieren $r, r' \in G$ mit $r' < r$ und $ab = r + kn = r' + k'n$, dann gilt $r - r' = (k' - k)n \in G$ und da $(k' - k) \in \mathbb{Z}$ also $k = k',\ r = r'$. Ein Widerspruch!

2. Man nennt alle Drehungen eines regelmäßigen Tetraeders, welche Ecken auf Ecken abbilden, *Rotationssymmetrien*. Aufgabe 2 begründet, dass es reicht folgende Rotationssymmetrien zu betrachten:



   - r ist die Drehung um L der Achse durch 1 und den Schwerpunkt des Dreiecks $(2, 3, 4)$.
   - s ist die Drehung um M der Achse durch die Mittelpunkte von $(2, 3)$ und $(1, 4)$.