

22.10.2008

I. Bouw  
L. Brewis und D.Ufer

## Übungen zur Algebra I - WS08/09 Blatt 2

Abgabe ist Mittwoch, den 29.10.2008, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

Die Übung findet entgegen der Ankündigung montags 12 Uhr c.t. im Hörsaal **H3** statt.

### Aufgabe 1: Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (2+1+2)

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^* := \{x \in \{0, \dots, n-1\} : \text{ggT}(x, n) = 1\}$  mit der Verknüpfung  $*_G$  der Multiplikation modulo  $n$  (siehe letztes Blatt), genannt die Gruppe der Einheiten von  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$  mit obiger Verknüpfung wirklich eine Gruppe ist.
- Sei nun  $n = 3^2$ . Bestimmen Sie die Ordnung von  $2 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ . Ist  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  zyklisch?
- Sei  $n = 15$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*$  nicht zyklisch ist.

### Aufgabe 2: Ordnung von Produkten von $k$ -Zyklen (1+2+2+1)

Sei  $S_n$  die symmetrische Gruppe auf  $n$  Elementen.

- Zeigen Sie: Die Ordnung eines  $k$ -Zyklus  $\sigma \in S_n$  ist  $k$ .
- Zeigen Sie: Die Ordnung eines Produkts  $\sigma := \sigma_1 \sigma_2$  von disjunkten  $k_i$ -Zyklen  $\sigma_i \in S_n$  hat die Ordnung  $\text{ord } \sigma = \text{kgV}(k_i)$ , wobei  $\text{kgV}$  das kleinste gemeinsame Vielfache bezeichnet.
- Besitzt  $S_5$  ein Element der Ordnung 6?
  - Besitzt  $S_4$  ein Element der Ordnung 6?
- Schreiben Sie als Produkt von disjunkten Zyklen und Transpositionen:
  - $(12)(2753)(451)$     •  $(197)(86975)(31267)$

### Aufgabe 3: Untergruppen der Symmetrischen Gruppe (2+3)

- Zeigen Sie, dass  $U := \{\sigma \in S_6 : \sigma(1) = 1\}$  eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_6$  ist. Welche Ordnung hat  $U$ ?
- Zeigen Sie: Es existiert keine Untergruppe  $H \subset A_4$  der alternierenden Gruppe mit Ordnung 6.  
Tipp: Schreiben Sie die Ordnung als Anzahl von Elementen verschiedener Ordnung und wenden Sie Aufgabe 3 von Übungsblatt 1 an.