29.10.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 3

Abgabe ist Mittwoch, den 05.11.2008, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

Aufgabe 1: Homomorphismen (2)
Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\phi:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition bezeichnet. Welche sind injektiv, welche surjektiv und welche sind Isomorphismen?

Aufgabe 2: Untergruppen und Normalteiler (3 Bonuspunkte + 3)
Finden Sie alle Untergruppen der unten aufgeführten Gruppen. Welche der Untergruppen sind normal?

(a) Die Quaternionengruppe $Q =< i, j :\ i^2 = j^2,\ i^4 = 1,\ ij = ji^3 >$ erzeugt von $i, j \in Q$, die die Relation $i^4 = j^4 = 1$, $i^2 = j^2$ und $ij = ji^3$ erfüllen, wobei 1 das neutrale Element bezeichnet.

(b) Die Diedergruppe $D_4 =< r, s :\ r^4 = s^2 = 1,\ srs = r^{-1} >$, also die Symmetriegruppe des Quadrats.

Aufgabe 3: Nebenklassen (2+2+2+2)

(a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe H von Index 2 normal ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe G/H für $H < G$ Untergruppe wie in (a) isomorph ist zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Finden Sie einen Gruppenhomomorphismus $\phi:\ D_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ so, dass $D_n/\ker(\phi) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Untergruppe von Index 3, die nicht normal ist.

Bemerkung zu Aufgabe 2a
Hier war ein Fehler im ausgegebenem Übungsblatt.
Eine konkrete Darstellung der Quaternionengruppe ist zum Beispiel als Matrix-Gruppe erzeugt durch $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

In einem späteren Blatt kehren wir zur Quaternionengruppe nochmal zurück.