12.11.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 5

Abgabe ist Mittwoch, den 19.11.2008, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)
Aufgabe 3 ist für Bachelor-Studenten freiwillig mit Bonuspunkten.

Aufgabe 1: Satz von Burnside (2+2)

(a) Sei der Ball 1 "Wunder von Bern" aus Übungsblatt 4 Aufgabe 3 gegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils drei nebeneinander liegende horizontale bzw. vertikale Streifen rot, blau oder gelb zu malen.

(b) Ein runder Geburtstagskuchen wird in 8 gleiche Stücke geteilt. Wie viele verschiedene Weisen gibt es rote und grüne Kerzen in der Mitte der Kuchenstücke zu plazieren? Argumentieren Sie ausführlich!

Aufgabe 2: Konjugation (2+1+1+2)
Sei S_n die symmetrische Gruppe auf n Buchstaben.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(a_1, ..., a_r)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_r))$ für einen r-Zykel $(a_1, ..., a_r) \in S_n$ und $\sigma \in S_n$.

(b) Finden Sie $\sigma \in S_5$, so dass $\sigma(12)(345)\sigma^{-1} = (13)(245)$.

(c) Wirke $G = S_5$ auf sich selbst durch Konjugation. Bestimmen Sie den Stabilisator G_τ von $\tau = (12)(345)$.

(d) Zeigen Sie, dass alle 2-3-Zyklen in S_5 konjugiert sind.
Tipp: Benutzen Sie den Bahn-Stabilisator-Satz und (c).

Aufgabe 3: Gruppen der Ordnung 8 (2+2+2)
Sei G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 8. Ziel ist es zu zeigen, dass G isomorph zur Quaternionengruppe Q (aus dem aktualisierten Übungsblatt 3) oder der Diedergruppe D_4 ist.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein Element $x \in G$ der Ordnung 4 und kein Element der Ordnung 8. Schließen Sie, dass es $y \in G$ gibt, so dass $G = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\}$ gilt.
Zeigen Sie dazu, dass falls $x^2 = e\ \forall x \in G$ dann folgt G ist abelsch.

(b) Bestimmen Sie die Möglichkeiten für $xy \in G$ als Element der Menge G wie oben. Zeigen Sie, dass $y^2 = e$ oder $y^2 = x^2$.

(c) Zeigen Sie: $G \simeq Q$ oder $G \simeq D_4$.