19.11.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 6

Abgabe ist Mittwoch, den 26.11.2008, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

Aufgabe 1: Ringe (2+2+3)

Sei $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ der kleinste Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, welcher den Körper $\mathbb{Q}$, sowie die Elemente $\alpha = \sqrt{2}$ und $\beta = \sqrt{3}$ enthält.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \{a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{6} : \ a_i \in \mathbb{Q}\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\alpha + \beta]$ als Unterringe von $\mathbb{C}$.

(c) Gibt es Elemente $x \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$, die jeweils eine der folgenden Gleichungen erfüllen? Bestimmen Sie gegebenenfalls x.

  (i) $x(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) = 1$

  (ii) $x^2 = 5$

  (iii) $x^2 = -2$

Aufgabe 2: Polynome (2)

Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wird das Polynom $x^4 + 3x^3 + x^2 + 6x + 10$ von $x^2 + x + 1$ im Polynomring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ geteilt?

Aufgabe 3: Faktorringe (1+1+1+1+1+2)

Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen und sei der Faktorring $\overline{R} = \mathbb{Z}[i]/I$ mit Ideal $I = (4 + i)$ und der kanonische Epimorphismus $\pi : R \to \overline{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $17 \equiv 0$ in $\overline{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Linksnebenklasse $a + bi + I$ ein Element aus $\mathbb{Z}$ enthält.

(c) Zeigen Sie, dass $\ker(\pi) \cap \mathbb{Z} = (17)$ gilt.

(d) Schließen Sie, dass der Körper $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ isomorph ist zu $\overline{R}$.
Tipp: Betrachten Sie die Einschränkung von π auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(e) Ist $(17) \subset R$ ein maximales Ideal?

(f) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]/(f)$ mit $f = x^2 - 2$ ein Körper mit 25 Elementen ist. Geben Sie dafür Repräsentanten der Nebenklassen an.