03.12.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 8

Abgabe ist Mittwoch, den 10.12.2008, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

Aufgabe 1: Winkeldreiteilung (1+2+2)

(a) Zeigen Sie die Identität $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ mittels der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sin\frac{\pi}{18}$. Begründen Sie, warum das von Ihnen gefundene Polynom irreduzibel ist.
Tipp: Benutzen Sie (a), um das Minimalpolynom zu bestimmen.

(c) Schließen Sie, dass der Sinus von $\frac{\pi}{6}$ konstruierbar ist, aber α aus (b) nicht. Schließen Sie, dass die Winkeldreiteilung nicht möglich ist.

Aufgabe 2: Konstruierbarkeit (1+1+2)
Seien a und b konstruierbar.

(a) Sei $\beta = \sqrt{a+\sqrt{b}}$. Was ist das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}(a,b)$?

(b) Begründen Sie: β ist konstruierbar.

(c) Zeichnen Sie die Konstruktion von $\beta = \sqrt{1+\sqrt{5}}$.

Aufgabe 3: Maximale Ideale ((1+1+2)+(1+2))

(a) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale folgender Ringe:
  (i) $R_1 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$,
  (ii) $R_2 = \mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$,
  (iii) $R_3 = \mathbb{R}[x]/(x^2)$.
  Tipp: Bestimmen Sie die Einheiten von R_3 und zeigen Sie, dass R_3 ein Hauptidealring ist.

(b) Beantworten Sie die Frage, ob die primitive vierte Einheitswurzel i in den folgenden Körpern enthalten ist:
  (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
  (ii) $\mathbb{Q}(\alpha)$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle der Gleichung $\alpha^3+\alpha+1$ ist.