

13.12.2008

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09 Blatt 10

Abgabe ist Mittwoch, den 07.01.2009, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

Aufgabe 1: Endliche Körper (1 + 2 + 3 = 6)

- (a) Wie viele irreduzible normierte Polynome von Grad 3 gibt es über \mathbb{F}_3 ?
- (b) Faktorisieren Sie $x^8 - x$ über \mathbb{F}_4 und \mathbb{F}_8 .
- (c) Sei $a \in \mathbb{F}_p$ mit p prim. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^p = a$ genau eine Lösung hat. Tipp: Zeigen Sie, dass $a^{p-1} = 1$ in \mathbb{F}_p .

Aufgabe 2: Automorphismen (1 + 2 + 2 + 1 = 6)

Bestimmen Sie $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ für folgende K :

- (a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- (b) K wo $[K : \mathbb{Q}] = 2$.
- (c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.
- (d) $K = \mathbb{Q}(2^{1/3})$.

Aufgabe 3: Kreisteilungskörper (1 + 1 + 1 + 1 = 4)

Sei ζ_5 eine primitive 5-te Einheitswurzel. Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_5)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Gruppe

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(L) \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sei $H \subset (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ die Untergruppe $H := \{1, 4\}$. In dieser Aufgabe werden wir den Fixkörper L^H bestimmen.

- (a) Zeigen Sie, dass $\zeta_5 + \zeta_5^{-1} \in L^H$.
- (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_5 + \zeta_5^{-1}$ über \mathbb{Q} . Tipp: Benutzen Sie, dass ζ_5 eine Nullstelle von $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $[L^H : \mathbb{Q}] = 2$.
- (d) Bestimmen Sie den Körper L^H .