07.01.2009

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 11

Abgabe ist Mittwoch, den 14.01.2009, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

WICHTIG: Ab 13.01.2009 findet die Vorlesung am Dienstags wieder in H15 statt.

Aufgabe 1: Zerfällungskörper (1+1)
Geben Sie für folgende Polynome den Zefällungskörper über $\mathbb{Q}$ als Teilkörper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ an, in dem Sie explizit Erzeuger der Körpererweiterung angeben. Berechnen Sie auch den Grad der Körpererweiterung über $\mathbb{Q}$.

(a) $f = t^3 + 1$

(b) $f = t^4 - 5t^2 + 6$

Aufgabe 2: Zerfällungskörper über endlichen Körpern (1+1)
Geben Sie für die modulo 5 reduzierten Polynome aus Aufgabe 1 den Zerfällungskörper über $\mathbb{F}_5$ an, in dem Sie dessen Anzahl an Elementen bestimmen.

Aufgabe 3: Automorphismengruppe (1+1+2+2)
Sei $\zeta_6 \in \mathbb{C}$ eine primitive 6-te Einheitswurzel und $\zeta_3 = \zeta_6^2$ eine primitive 3-te Einheitswurzel. In dieser Aufgabe betrachten wir die Nullstelle von dem Polynom $f := x^4 + 2x^2 + 4$.

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha_1 = \sqrt{2}\zeta_6, \alpha_2 = \sqrt{2}\zeta_6^2, \alpha_3 = \sqrt{2}\zeta_6^4, \alpha_4 = \sqrt{2}\zeta_6^5 \in \mathbb{C}$ Nullstellen von f sind.

(b) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \zeta_3)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist. Berechnen Sie auch $[L : \mathbb{Q}]$. Tipp: Zeigen Sie, dass $\zeta_6 \in \mathbb{Q}(\zeta_3)$.

(c) Zeigen Sie, dass Automorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ existieren mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, & \varphi_1(\zeta_3) &= \zeta_3, \\ \varphi_2(\sqrt{2}) &= +\sqrt{2}, & \varphi_2(\zeta_3) &= \zeta_3^2. \end{aligned}$$

(d) Überprüfen Sie, dass die Untergruppe von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ erzeugt von φ_1 und φ_2 isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.