14.01.2009

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

# Übungen zur Algebra I - WS08/09
# Blatt 12

Abgabe ist Mittwoch, den 21.01.2009, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

**Aufgabe 1: Normale Körpererweiterungen** (1+1+2)
Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal? Begründen Sie!

(a) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$, wobei $\alpha = \sqrt[7]{5}$.

(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{R}(\zeta_5)$ über $\mathbb{R}$, wobei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel ist.

(c) Eine beliebige quadratische Erweiterung $K/\mathbb{Q}$,

Tipp zu (c): Benutzen Sie zur Klassifikation der $K$ die Mitternachtsformel.

**Aufgabe 2: Der Satz von primitiven Element** (1+1+2+1)
Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

(a) Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Bestimmen Sie ein primitives Element $\alpha$ der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Überprüfen Sie mit Korollar 5.5.2, ob $L$ normal ist.

Tipp zu (c): $L$ enthält abzählbar unendlich viele primitive Elemente. Wählen Sie eins davon.

**Aufgabe 3: Die Ordnung der Automorphismengruppe** (1+1+1+2+2)
Sei $K = \mathbb{Q}$ und $L = K(\zeta) \subset \mathbb{C}$, wobei $\zeta$ eine primitive $p$-te Einheitswurzel ist mit $p$ ungerade, sei $\alpha = \sqrt[p]{2} \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f$ von $\alpha$ über $L$.

(b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper $M$ von $\alpha$ über $L$.

(c) Zeigen Sie, dass $M$ auch der Zerfällungskörper von $f$ über $K$ ist.

(d) Bestimmen Sie $G_1 = \mathrm{Aut}_L(M)$ und $G_2 = \mathrm{Aut}_K(M)$.

(e) Zeigen Sie: $G_1 \lhd G_2$ ist ein Normalteiler.

Tipp zu (d): Benutzen Sie Korollar 5.5.2.