21.01.2009

I. Bouw
L. Brewis und D.Ufer

Übungen zur Algebra I - WS08/09
Blatt 13

Abgabe ist Mittwoch, den 28.01.2009, vor der Vorlesung (**zu zweit!**)

WICHTIG: In der Woche von 2-4 Februar werd die Übung mit der Vorlesung am Mittwoch vertauscht.

Aufgabe 1: Die Galois-Korrespondenz (1+1+2+2)
Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, wobei p eine ungerade Primzahl ist.

(a) Überprüfen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine eindeutig bestimmte Untergruppe H von Index 2 besitzt. Sei $K = K_p := L^H$ der Fixkörper. Schließen Sie, dass $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

(c) Bestimmen Sie ein primitives Element α für $K/\mathbb{Q}$ für $p = 3, 5, 7$. (Tip: Argumentieren Sie geometrisch! Es reicht ein Element in K zu finden, dessen Minimalpolynom Grad 2 hat. Für $p = 5$ können Sie Aufgabe 3 von Blatt 10 benutzen.) Für welches n ist $K \subset \mathbb{R}$?

(d) Finden Sie eine Bedingung für p, sodass $K = K_p \subset \mathbb{R}$. (Tip: sei $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Zeigen Sie, dass $K = L^H \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\iota \in G$ ist.)

Aufgabe 2: Galois-Erweiterungen (1+2+3)
Sei L/F eine Galois-Erweiterung und $L/K/F$ ein Zwischenkörper.

(a) Zeigen Sie, dass L/K auch galoisch ist.

(b) Sei nun $F = \mathbb{Q}$ und L der Zerfällungskörper von $x^3 - 2$. Finden Sie ein Zwischenkörper K, sodass $K/\mathbb{Q}$ nicht galoisch ist.

(c) Sei $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3 \in \mathbb{Q}[t]$ und sei $K := \mathbb{Q}[t]/(f)$ eine Körpererweiterung in dem f eine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass f in K in Linearfaktoren zerfällt. Schließen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ galoisch ist und bestimmen Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 3: Galois-Gruppen in positiver Charakteristik (2+2)
Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. (Bitte beachten Sie, dass wir NICHT annehmen, dass F ein endlicher Körper ist.) Sei

$$f(x) = x^p - x - a \in F[x], \qquad K = F[x]/(f) \simeq K(\alpha),$$

wobei $\alpha \in K$ eine Nullstelle von f ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha + i$, $i = 1, \ldots, p-1$ auch Nullstellen von K sind. Schließen Sie, dass f separabel ist.

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen, dass K/F eine Galois-Erweiterung ist mit Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K, F) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Geben Sie den Erzeuger der Galois-Gruppe auch explizit an.