Dimensionstheorie und das noethersche Normalisierungslemma

Jörg Marhenke

Abteilung Reine Mathematik
Universität Ulm

Seminar Algebra im Wintersemester 2004

Übersicht

1. Dimensionstheorie
   - Der Dimensionsbegriff
   - Beispiele
   - Sätze aus der Dimensionstheorie
2. Das noethersche Normalisierungslemma
   - Das Normalisierungslemma
   - Wichtige Korollare

Zur Motivation

Dimension als lokale Eigenschaft

Zur Motivation
Dimension als lokale Eigenschaft

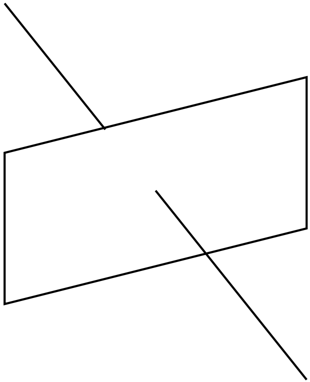

Abbildung: Dimension als lokale Eigenschaft

Zur Motivation

Dimension als lokale Eigenschaft

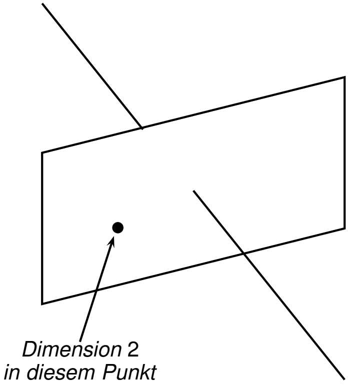

Abbildung: Dimension als lokale Eigenschaft

Zur Motivation
Dimension als lokale Eigenschaft

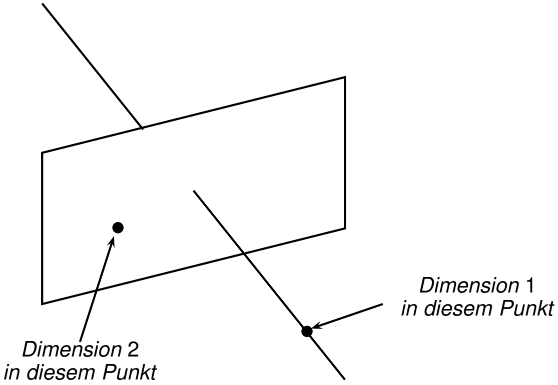

Abbildung: Dimension als lokale Eigenschaft

Die Krulldimension
Dimension

Sei A ein Ring.

- Es bezeichne
$$\mathcal{C}(A) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \text{ Primideal} \,\}$$
die Menge aller **Ketten von Primidealen.**
- Für eine Kette
$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$
definiert man die **Länge** von $\wp$ als $\lambda(\wp) = m$.
- Mit (**Krull-**)**Dimension** von A bezeichnet man
$$\dim(A) = \sup \{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \,\}.$$

Die Krulldimension

Dimension

Sei A ein Ring.

- Es bezeichne
$$\mathcal{C}(A) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \text{ Primideal} \,\}$$
die Menge aller **Ketten von Primidealen.**
- Für eine Kette
$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$
definiert man die **Länge** von $\wp$ als $\lambda(\wp) = m$.
- Mit (**Krull-**)**Dimension** von A bezeichnet man
$$\dim(A) = \sup \{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \,\}.$$

Die Krulldimension
Dimension

Sei A ein Ring.

- Es bezeichne
$$\mathcal{C}(A) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \text{ Primideal } \}$$
die Menge aller **Ketten von Primidealen.**
- Für eine Kette
$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$
definiert man die **Länge** von $\wp$ als $\lambda(\wp) = m$.
- Mit (**Krull-**)**Dimension** von A bezeichnet man
$$\dim(A) = \sup \{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \,\}.$$

Die Krulldimension
Dimension

Sei A ein Ring.

- Es bezeichne
$$\mathcal{C}(A) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \text{ Primideal} \,\}$$
die Menge aller **Ketten von Primidealen.**
- Für eine Kette
$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$
definiert man die **Länge** von $\wp$ als $\lambda(\wp) = m$.
- Mit (**Krull-**)**Dimension** von A bezeichnet man
$$\dim(A) = \sup \{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \,\}.$$

Die Krulldimension
Dimension

Sei A ein Ring.

- Es bezeichne
$$\mathcal{C}(A) = \{ \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \text{ Primideal} \}$$
die Menge aller **Ketten von Primidealen.**
- Für eine Kette
$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$
definiert man die **Länge** von $\wp$ als $\lambda(\wp) = m$.
- Mit (**Krull-**)**Dimension** von A bezeichnet man
$$\dim(A) = \sup \{ \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \}.$$

Die Krulldimension

Codimension

- Ist $P \subset A$ ein Primideal, so definiet man
$$\mathcal{C}(A,P) = \{ \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \}$$
als die Menge der Primidealketten, die in P enden.
- Die dazu gehörige **Codimension** von P wird erklärt durch
$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{ \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A,P) \}.$$
- Für beliebige Ideale $I \subset A$ setzt man
$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{ \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \text{ prim} \}.$$
- Unter der **Dimension** eines Ideals versteht man
$$\dim(I) = \dim(A/I).$$

Die Krulldimension
Codimension

- Ist $P \subset A$ ein Primideal, so definiet man
$$\mathcal{C}(A, P) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \,\}$$
als die Menge der Primidealketten, die in P enden.
- Die dazu gehörige **Codimension** von P wird erklärt durch
$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A, P) \,\}.$$
- Für beliebige Ideale $I \subset A$ setzt man
$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{\, \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \text{ prim} \,\}.$$
- Unter der **Dimension** eines Ideals versteht man
$$\dim(I) = \dim(A/I).$$

Die Krulldimension
Codimension

- Ist $P \subset A$ ein Primideal, so definiet man
$$\mathcal{C}(A, P) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \,\}$$
als die Menge der Primidealketten, die in P enden.
- Die dazu gehörige **Codimension** von P wird erklärt durch
$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A, P) \,\}.$$
- Für beliebige Ideale $I \subset A$ setzt man
$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{\, \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \text{ prim} \,\}.$$
- Unter der **Dimension** eines Ideals versteht man
$$\dim(I) = \dim(A/I).$$

Die Krulldimension

Codimension

- Ist $P \subset A$ ein Primideal, so definiet man
$$\mathcal{C}(A,P) = \{\, \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \,\}$$
als die Menge der Primidealketten, die in P enden.
- Die dazu gehörige **Codimension** von P wird erklärt durch
$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{\, \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A,P) \,\}.$$
- Für beliebige Ideale $I \subset A$ setzt man
$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{\, \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \text{ prim} \,\}.$$
- Unter der **Dimension** eines Ideals versteht man
$$\dim(I) = \dim(A/I).$$

Die Krulldimension
Codimension

- Ist $P \subset A$ ein Primideal, so definiet man
$$\mathcal{C}(A, P) = \{ \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \}$$
als die Menge der Primidealketten, die in P enden.
- Die dazu gehörige **Codimension** von P wird erklärt durch
$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{ \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A, P) \}.$$
- Für beliebige Ideale $I \subset A$ setzt man
$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{ \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \text{ prim} \}.$$
- Unter der **Dimension** eines Ideals versteht man
$$\dim(I) = \dim(A/I).$$

Beispiele

Körper und Hauptidealringe

- Jeder Körper hat Krulldimension 0.
- Jeder Hauptidealring hat Dimension 1.

Beispiele

Körper und Hauptidealringe

- Jeder Körper hat Krulldimension 0.
- Jeder Hauptidealring hat Dimension 1.

Beispiele
Körper und Hauptidealringe

- Jeder Körper hat Krulldimension 0.
- Jeder Hauptidealring hat Dimension 1.

Beispiele

Dimension des Polynomrings

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
  In diesem Beispiel haben alle maximalen Ketten von Primidealen die Länge n.
  Letzteres ist jedoch nicht immer der Fall:
- Sei $A = k[x]_{(x)}[y]$. Dann sind $(0) \subset (xy - 1)$ und $(0) \subset (x) \subset (x, y)$ zwei Primidealketten unterschiedlicher Länge.

Beispiele

Dimension des Polynomrings

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
  In diesem Beispiel haben alle maximalen Ketten von Primidealen die Länge n.
  Letzteres ist jedoch nicht immer der Fall:
- Sei $A = k[x]_{(x)}[y]$. Dann sind $(0) \subset (xy - 1)$ und $(0) \subset (x) \subset (x, y)$ zwei Primidealketten unterschiedlicher Länge.

Beispiele

Dimension des Polynomrings

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
  In diesem Beispiel haben alle maximalen Ketten von Primidealen die Länge n.
  Letzteres ist jedoch nicht immer der Fall:
- Sei $A = k[x]_{(x)}[y]$. Dann sind $(0) \subset (xy - 1)$ und $(0) \subset (x) \subset (x, y)$ zwei Primidealketten unterschiedlicher Länge.

Beispiele

Dimension des Polynomrings

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
  In diesem Beispiel haben alle maximalen Ketten von Primidealen die Länge n.
  Letzteres ist jedoch nicht immer der Fall:
- Sei $A = k[x]_{(x)}[y]$. Dann sind $(0) \subset (xy - 1)$ und $(0) \subset (x) \subset (x, y)$ zwei Primidealketten unterschiedlicher Länge.

Hilfssätze

- Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.
- Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.
- Jeder faktorielle Ring ist normal.

Hilfssätze

- Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.
- Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.
- Jeder faktorielle Ring ist normal.

Hilfssätze

- Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.
- Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.
- Jeder faktorielle Ring ist normal.

Hilfssätze

- Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.
- Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.
- Jeder faktorielle Ring ist normal.

Hilfssätze

- Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.
- Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.
- Jeder faktorielle Ring ist normal.

Wichtige Ergebnisse

- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, so gilt $\dim A = \dim B$.
- Ist A eine affine k-Algebra über einem Körper k, so gilt

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_k A.$$

Wichtige Ergebnisse

- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, so gilt $\dim A = \dim B$.
- Ist A eine affine k-Algebra über einem Körper k, so gilt

$$\dim \ A = \operatorname{trdeg}_k \ A.$$

Wichtige Ergebnisse

- Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, so gilt $\dim A = \dim B$.
- Ist A eine affine k-Algebra über einem Körper k, so gilt

$$\dim\ A = \operatorname{trdeg}_k\ A.$$

Das noethersche Normalisierungslemma

Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \dots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \dots, x_n] \to k[\xi_1, \dots, \xi_n], x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \dots, \xi_n] = (\xi_1, \dots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho - 1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \dots, r$.

Das noethersche Normalisierungslemma

Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \dots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \dots, x_n] \to k[\xi_1, \dots, \xi_n], x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \dots, \xi_n] = (\xi_1, \dots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho - 1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \dots, r$.

Das noethersche Normalisierungslemma

Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \ldots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \ldots, x_n] \to k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, $x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = (\xi_1, \ldots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho - 1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \ldots, r$.

Das noethersche Normalisierungslemma

Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \dots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \dots, x_n] \to k[\xi_1, \dots, \xi_n], x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \dots, \xi_n] = (\xi_1, \dots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho - 1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \dots, r$.

Das noethersche Normalisierungslemma

Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \ldots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \ldots, x_n] \to k[\xi_1, \ldots, \xi_n], x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = (\xi_1, \ldots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho - 1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \ldots, r$.

Beweis
des noetherschen Normalisierungslemmas

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist.
2. In einem zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.
3. Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Beweis
des noetherschen Normalisierungslemmas

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist.
2. In einem zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.
3. Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Beweis
des noetherschen Normalisierungslemmas

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist.
2. In einem zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.
3. Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Beweis
des noetherschen Normalisierungslemmas

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist.
2. In einem zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.
3. Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Beweis
des noetherschen Normalisierungslemmas

Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist.
2. In einem zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.
3. Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Krulls Hauptidealsatz
und verwandte Ergebnisse

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
- (Krulls Hauptidealsatz)
  Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $f \in A$ mit $\deg f \geq 1$. Dann ist $\dim (A/(f)) = n - 1$.
- Sei erneut $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\operatorname{codim}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = n$.

Krulls Hauptidealsatz

und verwandte Ergebnisse

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
- (Krulls Hauptidealsatz)
  Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $f \in A$ mit $\deg\ f \geq 1$. Dann ist $\dim\ (A/(f)) = n - 1$.
- Sei erneut $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\mathrm{codim}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = n$.

Krulls Hauptidealsatz
und verwandte Ergebnisse

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
- (Krulls Hauptidealsatz)
  Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $f \in A$ mit $\deg f \geq 1$. Dann ist $\dim (A/(f)) = n - 1$.
- Sei erneut $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\mathrm{codim}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = n$.

Krulls Hauptidealsatz

und verwandte Ergebnisse

- Der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ hat Krulldimension n.
- (Krulls Hauptidealsatz)
  Sei $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $f \in A$ mit $\deg\ f \geq 1$. Dann ist $\dim\ (A/(f)) = n - 1$.
- Sei erneut $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\text{codim}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = n$.

Der hilbertsche Nullstellensatz

- Ist $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \dots, x_n]$ ein maximales Ideal, so ist die Erweiterung $k \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.
- Sei $\mathfrak{m} \subset A$ wie zuvor und sei zusätzlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann sind alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ von der Form $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in k$. Genauer, die Abbildung

$$k^n \to \mathbb{A}^n_k, \ \alpha \mapsto (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n),$$

die einem n-Tupel $\alpha \in k^n$ das von allen $(x_i - \alpha_i)$ erzeugte Ideal zuordnet, ist bijektiv.

Der hilbertsche Nullstellensatz

- Ist $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein maximales Ideal, so ist die Erweiterung $k \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.
- Sei $\mathfrak{m} \subset A$ wie zuvor und sei zusätzlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann sind alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ von der Form $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in k$. Genauer, die Abbildung

$$k^n \to \mathbb{A}_k^n, \ \alpha \mapsto (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n),$$

die einem n-Tupel $\alpha \in k^n$ das von allen $(x_i - \alpha_i)$ erzeugte Ideal zuordnet, ist bijektiv.

Der hilbertsche Nullstellensatz

- Ist $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein maximales Ideal, so ist die Erweiterung $k \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.
- Sei $\mathfrak{m} \subset A$ wie zuvor und sei zusätzlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann sind alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ von der Form $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in k$. Genauer, die Abbildung
$$k^n \to \mathbb{A}_k^n, \ \alpha \mapsto (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n),$$
die einem n-Tupel $\alpha \in k^n$ das von allen $(x_i - \alpha_i)$ erzeugte Ideal zuordnet, ist bijektiv.

Der hilbertsche Nullstellensatz

- Ist $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein maximales Ideal, so ist die Erweiterung $k \subset A/\mathfrak{m}$ endlich.
- Sei $\mathfrak{m} \subset A$ wie zuvor und sei zusätzlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann sind alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ von der Form $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in k$. Genauer, die Abbildung

$$k^n \to \mathbb{A}_k^n, \ \alpha \mapsto (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n),$$

die einem n-Tupel $\alpha \in k^n$ das von allen $(x_i - \alpha_i)$ erzeugte Ideal zuordnet, ist bijektiv.