1 Dimensionstheorie

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem algebraischen Dimensionsbegriff. Zur besseren Abgerenzung dieses Dimensionsbegriffs vom topologischen folgt eine kurze und wenig formale Einleitung.

Bereits die antiken grichischen Mathematiker sahen eine Kurve als ein Objekt an, welches in Punkten endet. Eine Fläche dagegen wird von Kurven beschränkt und so weiter. In den Arbeiten zur Geometrie im neunzehnten Jahrhundert findet man einen intuitiven Gebrauch des Dimensionsbegriffs. Beispielsweise ging man davon aus, dass ein Objekt n-dimensional ist, sofern die kleinste Zahl an Parametern, die benötigt wird, um das Objekt zu beschreiben, n ist.

Peano machte als einer unter vielen gegen Ende des Jahrhunderts diese Vorstellung mit seiner Peano-Kurve zunichte. Es folgte eine Definition von Brouwer im Jahre 1913. Hier wurde zum ersten Mal Dimension als eine lokale Eigenschaft beschrieben. Sie wurde definiert als die kleinste Zahl n, für die beliebig kleine Umgebungen eines Punktes einen Rand von Dimension kleiner n besitzen. Ferner legte man fest, dass die Dimension der leeren Menge -1 ist.

In der algebraischen Geometrie befasste man sich zunächst mit reellen algebraischen Kurven. Diese wurden seit der Einführung der Koordinaten durch Descartes durch eine Gleichung in den Koordinaten der eukidischen Ebene definiert und waren in jeder Hinsicht eindimensional.

Die Einführung der komplexen Zahlen und der projektiven komplexen Ebene im ersten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts änderte zwar die Natur der Objekte, jedoch nicht die Ansicht, dass diese eindimensional sind. Daraus entwickelte sich die Idee, dass die Dimension losgelöst vom zu Grunde gelegten Körper zu betrachten ist.

Gerade im Fall der komplexen Zahlen treten besondere Probleme auf. Man spricht gleichermaßen von Riemannschen Flächen und algebraischen Kurven, was bereits eine gewisse Zweideutigkeit reflektiert. Im Allgemeinen spricht man von n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten, die aber als topologischer Raum betrachtet Dimension $2n$ haben sollten.

Im weiteren Verlauf der Entwicklung rückte der Funktionenkörper $k(X)$ einer Riemannschen Fläche in den Mittelpunkt. Ebenso wichtig war das Resultat, dass $k(X)$ den Transzendenzgrad 1 als Erweiterung von $\mathbb{C}$ besitzt.

Daraus ergab sich die Definition des algebraischen Dimensionsbegriffs, die zu Beginn

des letzten Jahrunderts entstand. Man definierte die Dimension einer irreduziblen Varietät im r -dimensionalen affinen Raum über einem Körper k als den Transzendenzgrad des zugehörigen rationalen Funktionenkörpers über k .
Diese Definition passt jedoch nicht zu geometrischen Bespielen mit reduziblen Varietäten wie in Abbildung 1.

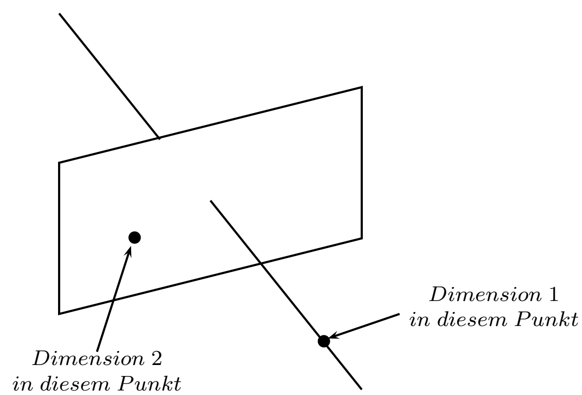

Abbildung 1: Dimension als lokale Eigenschaft

Es wurde schnell klar, dass eine Definition nötig war, die Dimension als lokale Eigenschaft beschreibt. Mit Lokalisierung des Koordinatenringes konnte dies zumindest nicht erreicht werden, da diese in den seltensten Fällen endlich über dem Grundkörper ist.
Daraus entstand im Jahr 1937 die bis heute gebräuchliche Definition von Krull, welche auch seinen Namen trägt. Gestützt wird diese druch Arbeiten von Noether und Rückert.

Definition 1.1 *Sei* A *ein Ring. Es bezeichne*

$$\mathcal{C}(A) = \{ \wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i \textit{ Primideal } \}$$

die Menge aller **Ketten von Primidealen** *in* A *. Für eine Kette*

$$\wp = (P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A)$$

definiert man die **Länge** *von* $\wp$ *als* $\lambda(\wp) = m$ *. Mit* **(Krull-) Dimension** *von* A *bezeichnet man*

$$\dim(A) = \sup\{ \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A) \}.$$

Ist $P \subset A$ *ein Primideal, so definiert man*

$$\mathcal{C}(A, P) = \{ \wp = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in \mathcal{C}(A) \mid P_m = P \}$$

als die Menge der Primidealketten, die in P *enden und die dazu gehörige* **Codimension** *(oder auch* **Höhe***) von* P *als*

$$\operatorname{codim}(P) = \sup\{\ \lambda(\wp) \mid \wp \in \mathcal{C}(A, P)\ \}.$$

Diese Definition lässt sich auf beliebige Ideale $I \subset A$ *übertragen. Man definiert dazu*

$$\operatorname{codim}(I) = \inf\{\ \operatorname{codim}(P) \mid P \supset I \ \textit{prim}\ \}.$$

Unter der **Dimension** *eines Ideals versteht man* $\dim(I) = \dim(A/I)$.

Bevor wir fortfahren, betrachten wir zwei grundlegende Beispiele.

Beispiel 1.2

(i) Jeder Körper hat Krulldimension 0 .

(ii) Jeder Hauptidealring, der kein Körper ist, hat Dimension 1 .

Beweis.

(i) In einem Körper k ist nur die Primidealkette

$$\wp = ((0) \subsetneq k)$$

eine Primidealkette mit echten Inklusionen. Daher folgt $\dim\ k = 0$.

(ii) Sei A ein Hauptidealring und sei

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq (\xi_1) = \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq (\xi_s) = \mathfrak{p}_s \subsetneq A$$

eine maximale Primidealkette mit echten Inklusionen. Wegen $\xi_1 \in (\xi_s)$ existiert ein $\zeta \in A$ mit $\zeta\xi_s = \xi_1$. Man bemerke, dass ζ aufgrund der strikten Inklusionen keine Einheit sein kann. Folglich gilt $1 \leq \deg\ \zeta < \deg\ \xi_1$ sowie $1 \leq \deg\ \xi_s < \deg\ \xi_1$. Für jedes $f \in (\xi_1)$ mit $f \neq 0$ gilt $\deg\ f \geq \deg\ \xi_1$ und somit erhalten wir $\zeta \notin (\xi_1)$, $\xi_s \notin (\xi_1)$ aber $\zeta\xi_s = \xi_1 \in (\xi_1)$. Dies widerspricht der Tatsache, dass (ξ_1) prim ist. Es folgt also $s = 1$. □

Etwas schwieriger einzusehen sind die beiden folgenden Beispiele.

Beispiel 1.3

(i) Der Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ hat Krulldimension n. In diesem Beispiel haben alle maximalen Ketten von Primidealen die Länge n.

(ii) Sei $A = k[x]_{(x)}[y]$. Dann sind $(0) \subset (xy-1)$ und $(0) \subset (x) \subset (x,y)$ zwei maximale Primidealketten unterschiedlicher Länge.

Beweis.

(i) Dies ist ein Korollar aus dem noetherschen Normalisierungslemma (vgl. Korollar 2.3).

(ii) Es ist $k[x]_{(x)}[y]/(xy-1) = k[x]_{(x)}(x^{-1}) = k(x)$ ein Körper, daher ist das Ideal $(xy-1)$ maximal und damit auch prim. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $(0) \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq (xy-1)$. Betrachtet man die Sequenz $A \to A/\mathfrak{p} \to A/(xy-1)$, so stellt man fest, dass entweder $A/\mathfrak{p} = A$ oder $A/\mathfrak{p} = A/(xy-1)$ gilt. Damit ist obige Kette maximal. $\square$

Die nachfolgenden Lemmas sind im weiteren Verlauf nützlich. Wir werden an mehreren Stellen auf die gezeigten Resultate verweisen.

Lemma 1.4 *Es sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Ferner seien $\mathfrak{p} \subset A$ und $\mathfrak{q} \subset B$ Primideale, für die $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ gilt. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein maximales Ideal in A, wenn $\mathfrak{q}$ ein maximales Ideal in B ist.*

Beweis. Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, so ist auch die Erweiterung $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{q}$ ganz. Es ist zu zeigen, dass $A/\mathfrak{p}$ genau dann ein Körper ist, wenn $B/\mathfrak{q}$ ein Körper ist. Dazu können wir ohne Einschränkung $\mathfrak{p} = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$ annehmen.
Sei also A ein Körper. Jedes $\beta \in B$ ist ganz und damit auch algebraisch über A. Damit ist $A[\beta]$ ein Körper und jedes $\beta \neq 0$ invertierbar.
Sei nun B ein Körper und $\alpha \in A$ mit $\alpha \neq 0$. Es folgt, dass $\alpha^{-1} \in B$ gilt und dass α ganz über A ist. Wir erhalten die Ganzheitsgleichung

$$\alpha^{-n} + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

für gewisse $a_i \in A$. Wir multiplizieren die Gleichung mit α^{n-1} und erhalten

$$\alpha^{-1} = -(a_1 + \cdots + a_n\alpha^{n-1}) \in A.$$

Somit ist A ein Körper. $\square$

Lemma 1.5 *Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset B$ Primideale mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$, so folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*

Beweis. Sei $S = A - \mathfrak{p}$. Die Ringerweiterung $S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \to S^{-1}(B/\mathfrak{q}_1)$ ist ganz. Da $S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ ein Körper ist, folgt mit Lemma 1.4, dass $S^{-1}(B/\mathfrak{q}_1)$ ebenfalls ein Körper ist. Wegen $S \cap \mathfrak{q}_2 = \varnothing$ ist $S^{-1}(\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) = 0$ und damit folgt $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$, denn für jedes $x \in \mathfrak{q}_2$ existiert ein $s \in S$ mit $sx \in \mathfrak{q}_1$. Wegen $s \notin \mathfrak{q}_1$ folgt $x \in \mathfrak{q}_1$. □

Lemma 1.6 *Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$, sodass $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.*

Beweis. Sei $S = A - \mathfrak{p}$. Dann ist $S^{-1}A \subset S^{-1}B$ eine ganze Ringerweiterung. Wir wählen ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \subset S^{-1}B$. Das Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap S^{-1}A$ ist maximal nach Lemma 1.4 und daher ist es das einzige maximale Ideal im lokalen Ring $S^{-1}A$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n}) & \subset & B & \xrightarrow{\beta} & S^{-1}B & \supsetneq & \mathfrak{n} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \cap A & \subset & A & \xrightarrow{\alpha} & S^{-1}A & \supsetneq & \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap S^{-1}A
\end{array}$$

Wählen wir $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n}) \subset B$, so ist $\mathfrak{q}$ prim mit $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Wie wir dem Diagramm entnehmen können, ist $\mathfrak{q} \cap A = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$. □

In der algebraischen Geometrie untersucht man oft ganze Ringerweiterungen. Der folgende Satz ist daher für die Arbeit auf diesem Gebiet von Bedeutung. Im Verlauf dieser Arbeit wird er im Beweis des noetherschen Normalisierungslemmas eingesetzt.

Satz 1.7 *Ist $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung, so gilt $\dim A = \dim B$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_s \subset B$ eine Primidealkette, so ist auch die Kette der herunter geschnittenen Primideale $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_s \subset A$ mit $\mathfrak{p}_\rho = \mathfrak{q}_\rho \cap A$ eine Primidealkette in A mit strikten Inklusionen nach Lemma 1.5. Damit erhalten wir dim $A \geq$ dim B .

Wir betrachten nun eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_s \subset A$ mit echten Inklusionen. Nach Lemma 1.6 existiert ein Primideal $\mathfrak{q}_0 \subset B$ mit $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$. Mit Hilfe des Going-Up Theorems lässt sich dann eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_s \subset B$ konstruieren, für die $\mathfrak{q}_\rho \cap A = \mathfrak{p}_\rho$ gilt. Folglich erhalten wir dim $A \leq$ dim B . □

Das folgende Korollar liefert eine wichtige Charakterisierung des Dimensionsbegriffs. Dazu rufen wir uns die Definition des Transzendenzgrades nochmals in Erinnerung.

Definition 1.8 *Sei K/k eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Der* **Transzendenzgrad** *dieser Erweiterung ist definiert als die kleinste ganze Zahl n, für die $x_1, \ldots, x_n \in K$ existieren, sodass die Erweiterung $K/k(x_1, \ldots, x_n)$ algebraisch ist. Man bemerke, dass diese Definition auch auf affine k-Algebren anwendwar ist, wenn man zum Quotientenkörper übergeht.*

Korollar 1.9 *Ist A eine affine k-Algebra über einem Körper k, so gilt*

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_k A.$$

Beweis. Sei $\operatorname{trdeg} A = n$. Dann existieren $\xi_1, \ldots, \xi_n \in A$ sodass die Erweiterung $k[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subset A$ algebraisch ist. Nach Satz 1.7 ist dann $\dim A = \dim k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist der Ring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ isomorph zum Polynomring in n Variablen $k[x_1, \ldots, x_n]$. Letzterer hat nach Korollar 2.3 Dimension n. $\square$

2 Das noethersche Normalisierungslemma

Bevor wir mit dem noetherschen Normalisierungslemma beginnen, benötigen wir noch das folgende Lemma für den Beweis von Satz 2.2.

Lemma 2.1 *Jeder faktorielle Ring ist normal.*

Beweis. Sei A ein faktorieller Ring und $\alpha = a/b \in Q(A)$ sei ganz über A, wobei a und b ohne Einschränkung als teilerfremd vorausgesetzt seien. Wäre $\alpha \notin A$, so gäbe es ein Primelement $p \in A$ mit $p|b$ und $p \nmid a$. Ferner genügt α einer Ganzheitsgleichung

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ mit } a_i \in A.$$

Damit erhält man

$$a^n + a_1 a^{n-1} b + \cdots + a_n b^n = 0.$$

Nun gilt $p|b$ und folglich $p|a^n$, also auch $p|a$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Die Noether-Normalisierung findet viele Anwendungen in der Theorie der affinen k-Algebren. Mit dem Normalisierungslemma lassen sich viele wichtige Ergebnisse beweisen, darunter der hilbertsche Nullstellensatz, eine Form des krullschen Hauptidealsatzes und die Tatsache, dass der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ Dimension n hat.

Satz 2.2 *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann existieren $\xi_1, \ldots \xi_n \in A$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) A ist ein endlich erzeugter Modul über dem Unterring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ von A.

(ii) Der Morphismus $k[x_1, \ldots, x_n] \to k[\xi_1, \ldots, \xi_n], x_i \mapsto \xi_i$ ist ein Isomorphismus.

Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq A$ eine aufsteigende Kette von Idealen von A, so kann man den Polynomring $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ noch so wählen, dass

$$\mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = (\xi_1, \ldots, \xi_{i(\rho)})$$

von Variablen erzeugt wird. Für eine echt aufsteigende Kette gilt sogar $i(\rho-1) < i(\rho)$ für $\rho = 2, \ldots, r$.

Beweis. Es genügt, den Satz für den freien Polynomring $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ zu zeigen. Dazu überlegt man sich, dass man die Algebra A als Quotient eines solchen

freien Polynomrings A' schreiben kann. Bezeichne $\mathfrak{a}_0$ den Kern der Restklassenabbildung $A' \to A$ und seien die Urbilder von $\mathfrak{a}_\rho \subset A$ für $\rho = 1, \ldots, r$ mit $\mathfrak{a}'_\rho$ mit bezeichnet. Sind dann $\xi'_i \in A'$ Elemente, welche die Aussage des Satzes für A' erfüllen, so erfüllen die Bilder $\xi_i \in A$ für $i > i(0)$ die Behauptung für A.
Den eigentlichen Beweis werden wir in drei Schritten führen:

(i) Zunächst soll die Behauptung für $r = 1$ und den Spezialfall, dass $\mathfrak{a}_1$ ein Hauptideal ist, gezeigt werden.

(ii) In einen zweiten Schritt erhalten wir die Aussage für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}_1$.

(iii) Abschließend behandeln wir den Fall mehrerer Ideale.

Sei also zunächst $r = 1$ und $\mathfrak{a}_1 = (\xi_1)$ ein Hauptideal, welches von $\xi_1 \notin k$ erzeugt wird. Folglich ist $\xi_1 = \Lambda(x_1, \ldots, x_m) \in k[x_1, \ldots, x_m]$. Wählt man $\xi_i = x_i - x_1^{t_i}$ für $i = 2, \ldots, m$ mit geeigneten $t_i \in \mathbb{N}$, so ist $k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = B \subset A$ eine ganze Ringerweiterung. Dazu genügt es, die Exponenten t_i so zu wählen, dass x_1 ganz über B ist. x_1 genügt der Gleichung

$$\Lambda(x_1, \xi_2 + x_1^{t_2}, \ldots, \xi_m + x_1^{t_m}) - \xi_1 = 0.$$

Mit Hilfe von Multiindices lässt sich das Polynom Λ umschreiben zu

$$\Lambda = \sum_{\mu \in I} a_\mu x^\mu.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\sum_{\mu \in I} a_\mu x_1^{\mu_1} (\xi_2 + x_1^{t_2})^{\mu_2} \cdots (\xi_m + x_1^{t_m})^{\mu_m} - \xi_1 = 0.$$

Sei g so gewählt, dass $g > \max \{ \mu_i \mid \mu \in I \}$ gilt. Setzt man dann $t_i = g^i$, so sind die Werte von $f(\mu) = \mu_1 + t_2\mu_2 + \cdots + \mu_m t_m$ paarweise verschieden. Bezeichne $\bar{\mu} \in I$ den Index, für den $f(\bar{\mu}) = \max \{ f(\mu) \mid \mu \in I \}$ gilt. Mit dieser neuen Notation erhalten wir die Gleichung

$$a_{\bar{\mu}} x_1^{f(\bar{\mu})} + \sum_{j < f(\bar{\mu})} P_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) x_1^j = 0.$$

Daraus ergibt sich nach Division durch $a_{\bar{\mu}} \in k^\times$ eine Ganzheitsgleichung für x_1 über B. Also ist A ganz über $B = k[\xi_1, \ldots, \xi_m]$. Aufgrund der algebraischen Unabhängigkeit der $x_1, \ldots, x_m$ sind auch die $\xi_1, \ldots, \xi_m$ algebraisch unabhängig über k. Um den ersten Teil des Beweises abschließen zu können, müssen wir noch zeigen, dass $\mathfrak{a}_1 \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_m] = (\xi_1)$ gilt. Dazu betrachten wir den faktoriellen Ring $k[\xi_1, \ldots, \xi_m]$. Dieser ist nach Lemma 2.1 normal. Ist also $q \in \mathfrak{a} \cap B$, so kann man $q = \xi_1 q'$ mit einem $q' \in A \cap k(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ schreiben. q' ist ganz über $k[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ und somit folgt auch $q' \in k[\xi_1, \ldots, \xi_m]$.

In einem nächsten Schritt wollen wir den Beweis für ein Ideal $\mathfrak{a}_1$ führen, das nicht notwendig ein Hauptideal ist. Wir zeigen dieses Teilergebnis mit Hilfe einer Induktion nach der Anzahl der Variablen m . Der Fall $m = 1$ ist trivial. Sei $\xi_1 \in \mathfrak{a}_1$ mit $\xi_1 \neq 0$ gewählt. Dann ist $\xi_1 \notin k$, denn sonst wäre $\mathfrak{a}_1 = A$. Mit der in Schritt (i) beschriebenen Methode konstruiert man Elemente $\eta_2, \ldots, \eta_m \in A$, sodass $\xi_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ algebraisch unabhängig über k sind. Dann ist A ganz über $C = k[\xi_1, \eta_2, \ldots, \eta_m]$ und es ist $\xi_1 A \cap C = \xi_1 C$. Nach Induktionsvorausetzung existieren Elemente $\xi_2, \ldots, \xi_m \in k[\eta_2, \ldots, \eta_m]$, welche die Bedingungen des Satzes für $k[\eta_2, \ldots, \eta_m]$ und $\mathfrak{a}_1 \cap k[\eta_2, \ldots, \eta_m]$ erfüllen. Dann erfüllen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ die Behauptung des Satzes für A und $\mathfrak{a}_1$.

Abschließend bleibt noch der Fall mehrerer Ideale, also $r \geq 2$, zu betrachten. Genau wie im vorigen Beweisschritt zeigen wir die Behauptung mittels Induktion. Der Fall $r = 1$ ist bereits gezeigt. Seien also $\eta_1, \ldots, \eta_m \in A$ so, dass die Behauptung des Satzes für die Idealkette $\mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{r-1}$ erfüllt ist. Man setze $i_0 = i(r-1)$. Nach Obigem existieren $\xi_{i_0}, \ldots, \xi_m \in k[\eta_{i_0}, \ldots, \eta_m]$, welche die Behauptung des Satzes für $k[\eta_{i_0}, \ldots, \eta_m]$ und $\mathfrak{a}_r \cap k[\eta_{i_0}, \ldots, \eta_m]$ erfüllen. Wir setzen $\xi_i = \eta_i$ für $i = 1, \ldots, i_0$ und erhalten so ein System $\xi_1, \ldots, \xi_m$, das die Behauptung des Satzes erfüllt.

Nun bleibt lediglich die Behauptung über die strikten Inklusionen bei Primidealketten zu zeigen. Wir führen dazu einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es sei ρ so, dass $i(\rho - 1) = i(\rho)$ gilt. Dann wäre aber $\mathfrak{a}_{\rho-1} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_m] = \mathfrak{a}_\rho \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_m] = (\xi_1, \ldots, \xi_\rho)$. Nach Lemma 1.5 folgt dann, dass $\mathfrak{a}_{\rho-1} = \mathfrak{a}_\rho$ gelten muss. Dies ist ein Widerspruch. □

Wie oben beschrieben, liefert das noethersche Normalisierungslemma einige interessante und wichitge Korollare. Einige davon sollen im Folgenden behandelt werden.

Korollar 2.3 *Der Polynomring* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *hat Krulldimension* n *.*

Beweis. Wir führen einen Induktionbeweis, der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei

$$\varphi = ((0) = \mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r) \in \mathcal{C}(A)$$

eine echt aufsteigende Kette von Primidealen. Wir wählen ein irreduzibles Element $f \in \mathfrak{a}_1$ und Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in k[x_1, \ldots, x_n]$, sodass die Erweiterung

$k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}] \subset k[x_1, \dots, x_n]/(f)$ endlich und ganz ist. Letzteres ist möglich nach dem noetherschen Normalisierungslemma. Mit Hilfe des Going-Down Theorems und Lemma 1.5 erhalten wir eine Primidealkette

$$\varphi_{(f)} = ((0) = \mathfrak{a}_1/(f) \subsetneq \mathfrak{a}_2/(f) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_r/(f)),$$

welche nach Satz 1.7 maximal in $k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]$ ist. Nach Induktionhypothese gilt $\lambda(\varphi_{(f)}) = n - 1$ und damit folgt die Behauptung. □

Satz 2.4 (Krulls Hauptidealsatz)
Sei $A = k[x_1, \dots, x_n]$ *und* $f \in A$ *mit* $\deg f \geq 1$. *Dann ist* $\dim(A/(f)) = n-1$.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Beweis von Korollar 2.3. □

Satz 2.5 *Sei erneut* $A = k[x_1, \dots, x_n]$ *und sei* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal. Dann gilt* $\operatorname{codim}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = n$.

Beweis. Die Aussage folgt ebenfalls aus dem Beweis von Korollar 2.3. □

Satz 2.6 (Hilbertscher Nullstellensatz)
Ist $\mathfrak{m} \subset A = k[x_1, \dots, x_n]$ *ein maximales Ideal, so ist die Erweiterung* $k \subset A/\mathfrak{m}$ *endlich.*

Beweis. Nach dem noetherschen Normalisierungslemma existieren $\xi_1, \dots, \xi_s \in A$, sodass die Erweiterung $k[\xi_1, \dots, \xi_s] \subset A/\mathfrak{m}$ endlich und ganz ist. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, folglich ist $A/\mathfrak{m}$ ein Körper. Dann gilt aber $\dim A/\mathfrak{m} = k[\xi_1, \dots, \xi_s] = 0$ und somit $s = 0$. □

Korollar 2.7 *Sei* $\mathfrak{m} \subset A$ *wie in Satz 2.6 und sei zusätzlich* k *ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann sind alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subset A$ *von der Form* $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ *mit* $\alpha_i \in k$. *Genauer, die Abbildung*

$$k^n \to \mathbb{A}_k^n = \operatorname{MaxSpec}(k[x_1, \dots, x_n]), \ \alpha \mapsto (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n),$$

die einem n *-Tupel* $\alpha \in k^n$ *das von allen* $(x_i - \alpha_i)$ *erzeugte Ideal zuordnet, ist bijektiv.*

Beweis. Ist k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, so ist $A/\mathfrak{m} = k$. Damit folgt, dass $\mathfrak{m}$ von der Gestalt $\mathfrak{m} = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ sein muss, denn sonst wäre entweder $\mathfrak{m}$ nicht maximal oder $A/\mathfrak{m} \supsetneq k$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □