Vervollständigung topologischer abelscher Gruppen

Robin Nittka

24. Januar 2005

Wiederholung Topologie

- Definition "Topologie":
  Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Topologie auf X, falls gilt:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
  - $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter beliebiger Vereinigung.
  - $\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter endlichem Durchschnitt.

  Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen dann *offen* in X, ihre Komplemente *abgeschlossen*.
  Im Folgenden sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Definition "Basis":
  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Basis einer Topologie von X, falls gilt:
  - $\forall x \in X\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$
  - $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset B_1 \cap B_2$

  Dann heißt $\mathcal{T}_\mathcal{B} := \{\mathcal{O} \subset X | \forall x \in \mathcal{O}\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset \mathcal{O}\}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie.

- Definition "Produkttopologie endlich vieler Räume":
  Seien $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ topologische Räume.
  Dann heißt mit der Basis $\mathcal{B} := \{\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n | \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i\}$ der Raum $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ der *Produktraum* von $X_1, \ldots, X_n$.

- Definition "Umgebung":
  Sei $x \in X$. Jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ heißt *offene Umgebung* von x, und jede Obermenge einer offenen Umgebung von x heißt *Umgebung* von x. $\mathcal{U}_0(x)$ bezeichnet die Menge der offenen Umgebungen von x, $\mathcal{U}(x)$ die Menge der Umgebungen von x.
  Offenbar ist eine Menge $\mathcal{O}$ offen genau dann, wenn sie Umgebung von allen ihren Punkte ist, denn man hat ja die Darstellung $\mathcal{O} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0(x) \wedge x \in \mathcal{O} \wedge U \subset \mathcal{O}} U$.

- Definition "Umgebungsbasis":
  Ein System $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von x, falls es zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $\tilde{\alpha}$ gibt mit $U_{\tilde{\alpha}} \subset U$.
  Man sagt, x besitze eine *abzählbare Umgebungsbasis*, falls es eine Umgebungsbasis von x mit abzählbarem $\mathcal{I}$ gibt.
  Man sagt, $(X, \mathcal{T}_X)$ genüge dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

- Definition "Abschluß":
  $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von $E \subset X$, falls $\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap E \neq \emptyset$.
  Die abgeschlossene Menge $\overline{E} := \{x \in X |\ x$ ist Berührpunkt von $E\}$ heißt *Abschluß* von E.

- Definition "Stetigkeit":
  Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls $\forall U \in \mathcal{U}(f(x_0)) : f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$.
  f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist. Dies ist äquivalent damit, daß Urbilder offener Mengen stets wieder offen sind bzw. daß Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.
  Man sieht leicht ein, daß die Komposition stetiger Funktionen wiederum stetig ist.
  Eine bijektive Funktion f heißt *bistetig*, falls sowohl f als auch f^{-1} stetig ist.

- Definition "Unterraumtopologie": Sei $Y \subset X$. Die Topologie $\mathcal{T}_Y := \{\mathcal{O} \cap Y | \mathcal{O} \in \mathcal{T}_X\}$ heißt Unterraumtopologie von Y.

- Definition "vorwärts induzierte Topologie":
  Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Funktion.
  Dann ist $\mathcal{T}_Y := \{\mathcal{O} \subset Y | f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_X\}$ eine Topologie auf Y, und zwar die feinste, bezüglich der f stetig ist, und wird *von f vorwärts induzierte Topologie* genannt.

- Definition "hausdorff'sch":
  $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff-Raum*, falls gilt:
  $$\forall x_1 \neq x_2 \in X\ \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1), U_2 \in \mathcal{U}(x_2) : U_1 \cap U_2 = \emptyset$$
  Dies bedeutet, daß man je zwei Punkte mit offenen Mengen separieren kann.
  Beispiel: $\mathbb{R}^N$ mit der euklidischen Topologie ist hausdorff'sch.
  Gegenbeispiel: $\big(\mathbb{N}, \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{N} : |A^C| < \infty\}\big)$ ist nicht hausdorff'sch.

Definition (*topologische abelsche Gruppe*)

Ein Tripel $(G, \mathcal{T}_G, +)$ heißt *topologische Gruppe*, falls $(G, +)$ eine Gruppe ist und $(G, \mathcal{T}_G)$ ein topologischer Raum ist, so daß die Abbildungen $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x + y$ und $G \to G, x \mapsto -x$ stetig sind bezüglich $\mathcal{T}_G$ bzw. $\mathcal{T}_{G\times G}$.
Eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T}_G, +)$ heißt *topologische abelsche Gruppe*, falls $(G, +)$ abelsch ist.

Bemerkung 1

Man kann anstelle der Stetigkeit von $+$ und $-$ auch die Stetigkeit der Funktion $s : G \to G, (x, y) \mapsto x - y$ fordern: Aus der Stetigkeit von $+$ und $-$ folgt die Stetigkeit von s als Komposition stetiger Funktionen. Und wenn umgekehrt s stetig ist, so auch $-$, da die konstante Funktion $x \mapsto 0$ stetig ist, und damit ist auch $+$ stetig.

Konvention

Im Folgenden bezeichne $(G, \mathcal{T}_G, +)$ stets eine topologische abelsche Gruppe.

Lemma 1

Ist $\{0\}$ abgeschlossen in G, so ist G hausdorff'sch.

Beweis:

s ist stetig. Daher ist $s^{-1}(\{0\}) = \{(x, x) | x \in G\} =: \Delta$ abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion.
Seien nun $x_1 \neq x_2 \in X$ beliebig. Dann ist $(x_1, x_2) \in (G \times G) \setminus \Delta \in \mathcal{T}_{G\times G}$. Nach Definition der

Produkttopologie gibt es dann eine Basismenge $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset (G \times G) \setminus \Delta$ mit $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_G$.
Dies heißt aber $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{U}(x_1), \mathcal{O}_2 \in \mathcal{U}(x_2), \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Weil x_1 und x_2 beliebig waren, ist $(G, \mathcal{T}_G)$ also nach Definition hausdorff'sch.

Bemerkung 2

Die Translationen $T_a : G \to G, x \mapsto x + a$ sind offenbar bijektiv und stetig mit wiederum stetiger Umkehrfunktion (nämlich T_{-a}), also sogenannte *Homöomorphismen* von G nach G. Daher gilt die Äquivalenz $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_G \Leftrightarrow a + \mathcal{O} \in \mathcal{T}_G$ und äquivalent dazu $U \in \mathcal{U}(0) \Leftrightarrow a + U \in \mathcal{U}(a)$. Also legen die Umgebungen der 0 bereits vollständig die Topologie fest.

Satz 1

1. $H := \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}(0)} U = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}_0(0)} U \leq G$
2. $H = \overline{\{0\}}$
3. G/H ist hausdorff'sch
4. G ist hausdorff'sch $\Leftrightarrow H = \{0\}$

Beweis:

1. Untergruppenkriterium: $0 \in H \neq \emptyset$. Seien $x, y \in H$. z.z.: $x - y \in H$.
   Sei $V \in \mathcal{U}_0(0)$. Es ist $\tilde{V} := m^{-1}(V) \in \mathcal{U}_0(0)$, also $y \in \tilde{V}$.
   Damit ist $-y = m^{-1}(y) \in m^{-1}(\tilde{V}) = V$ wegen $m = m^{-1}$.
   $$x \in H = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0} U \overset{T_{-y}}{\Longrightarrow} x - y \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_0(-y)} U \overset{V \in \mathcal{U}_0(-y)}{\subset} V$$
   Und weil V beliebig war gilt $x - y \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{U}_0(0)} V = H$.
2. $$x \in H \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(0) : x \in U \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(0) : 0 \in x - U \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}(x) : 0 \in V \Leftrightarrow x \in \overline{\{0\}}$$
3. Man betrachtet auf G/H die von der kanonischen Projektion $p : G \to G/H, x \mapsto x + H$ vorwärts induzierte Topologie $\mathcal{T}_{G/H}$.
   Dann ist $G/H \setminus \{0 + H\} \in \mathcal{T}_{G/H}$, weil $p^{-1}(G/H \setminus \{0 + H\}) = G \setminus H = G \setminus \overline{\{0\}} \in \mathcal{T}_G$, d.h. $\{0+H\} = \{0_{G/H}\}$ abgeschlossen ist. Nach dem vorigen Lemma ist also G/H hausdorff'sch.
4. Ist $H = \{0\}$, so ist $G \cong G/H$ und damit hausdorff'sch.
   Ist andererseits G hausdorff'sch, so gibt es zu jedem beliebigen $x \in G, x \neq 0$ Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}(0), U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $x \notin U_1$ und daher $x \notin \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}(0)} U = H$.

Definition (*Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen*)

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ in einem topologischen Raum heißt *konvergent* gegen $x \in X$ und man schreibt $x_n \to x$, falls
$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in U$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ in einer topologischen Gruppe heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : x_n - x_m \in U$$

Bemerkung 3

Im Allgemeinen ist der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig festgelegt. Betrachte als Beispiel den Raum $X = \{1, 2\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Dort konvergiert jede Folge sowohl gegen 1 als auch gegen 2.
In Hausdorff-Räumen ist der Grenzwert allerdings eindeutig, denn gelte $x_n \to x$, so gibt es zu jedem $y \neq x$ Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}(x), U_2 \in \mathcal{U}(y)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Also folgt aus $x_n \in U_1\ \forall n \geq n_0$ sofort $x_n \notin U_2\ \forall n \geq n_0$ und daher $x_n \not\to y$.

Bemerkung 4

Stetige Funktionen sind auch folgenstetig. Das bedeutet, daß für eine stetige Funktion $f : X \to Y$ aus $x_n \to x$ sofort $f(x_n) \to f(x)$ folgt. Dies erkennt man leicht an der Definition von Konvergenz und Stetigkeit in einem Punkt.

Lemma 2

$$\forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists \mathcal{O}_U \in \mathcal{U}_0(0) : (\mathcal{O}_U - \mathcal{O}_U) \cap (\mathcal{O}_U + \mathcal{O}_U) \subset U$$

Beweis:

$s(x, y) = x - y$ ist stetig, also ist $s^{-1}(U) \in \mathcal{U}((0, 0))$ Nach Definition der Produkttopologie gibt es $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_G$ mit $(0, 0) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset s^{-1}(U)$, d.h. $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 \subset U$. Analog findet man aufgrund der Stetigkeit von $+$ Teilmengen $\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4 \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 \subset U$.
Dann besitzt $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 \cap \mathcal{O}_4$ die gewünschte Eigenschaft.

Definition (*Die Vervollständigung* $\hat{G}$ *von* G)

Wir führen auf der Menge der Cauchy-Folgen einer topologischen abelschen Gruppe G die Äquivalenzrelation $\sim$ mittels $(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow x_n - y_n \to 0$ ein und definieren $\hat{G} := G/\sim = \{[(x_n)]_\sim\}$.
Wir bezeichnen die Projektion $G \to \hat{G}, x \mapsto [(x)]_\sim$ mit Φ.
Wir erklären auf $\hat{G}$ die Addition mittels $[(x_n)]_\sim + [(y_n)]_\sim := [(x_n + y_n)]_\sim$ und die Invertierung mittels $-[(x_n)]_\sim := [(-x_n)]_\sim$, sowie die Topologie $\mathcal{T}_{\hat{G}} := \{\hat{\mathcal{O}} \subset \hat{G} | \forall x \in \hat{\mathcal{O}}\ \exists \mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0) : x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{\mathcal{O}}\}$. Hierbei setzt man $CF(A) := \{[(x_n)]_\sim | (x_n) \subset A \text{ ist Cauchy-Folge}\}$ für $A \subset G$.

Bemerkung 5

Für die Funktion $CF : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(\hat{G})$ gilt offensichtlich $A \subset B \Rightarrow CF(A) \subset CF(B)$ und $CF(-A) = -CF(A)$. Zudem ist nach Definition von $+_{\hat{G}}$ auch $CF(A) + CF(B) \subset CF(A + B)$.

Bemerkung 6

Es ist $\operatorname{Kern}\Phi = \{x \in G | (x) \sim (0)\} = \{x \in G | x \to 0\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(0)} U = \overline{\{0\}}$.

Folglich ist Φ injektiv genau dann, wenn G hausdorff'sch ist.

Lemma 3

Die Operationen auf $\hat{G}$ sind wohldefiniert und machen $(\hat{G}, +)$ zu einer abelschen Gruppe. Zudem ist $\mathcal{T}_{\hat{G}}$ eine Topologie auf $\hat{G}$, $(G, \mathcal{T}_{\hat{G}}, +)$ durch die $\hat{G}$ zu einer topologischen Gruppe wird, und Φ ist ein stetiger Homomorphismus von G nach $\hat{G}$.

Beweis:

Im Folgenden sind, sofern nichts anderes gesagt wird, alle auftretenden Folgen als Cauchy-Folgen in G zu verstehen, U als beliebige Umgebung der 0 und $\mathcal{O}_U$ immer wie im letzten Lemma.

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:
  - Reflexivität: $x_n - x_n = 0 \to 0$ ist klar, also $(x_n) \sim (x_n)$.
  - Symmetrie: Gelte $(x_n) \sim (y_n)$, d.h. $x_n - y_n \to 0$. Es ist $-U \in \mathcal{U}(0)$ wegen Stetigkeit von $-$ und daher $x_n - y_n \in -U \ \forall n \geq n_0$, folglich $y_n - x_n \in U \ \forall n \geq n_0$ und damit $y_n - x_n \to 0$, also $(y_n) \sim (x_n)$.
  - Transitiviät: Gelte $(x_n) \sim (y_n), (y_n) \sim (z_n)$. Dann ist $x_n - z_n = \underbrace{x_n - y_n}_{\in \mathcal{O}_U \forall n \geq n_1} + \underbrace{y_n - z_n}_{\in \mathcal{O}_U \forall n \geq n_2} \in \mathcal{O}_U + \mathcal{O}_U \subset U \ \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$, d.h. $(x_n) \sim (z_n)$.

- $[(-x_n)]_\sim$ ist erklärt, d.h. $(-x_n)$ ist wiederum Cauchy-Folge:
  Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in U \ \forall m, n \geq n_0$.
  Dann gilt auch $-x_n - (-x_m) = x_m - x_n \in U \ \forall n, m \geq n_0$, d.h. $(-x_n)$ ist Cauchy-Folge.

- $[(x_n + y_n)]_\sim$ ist erklärt, d.h. $(x_n + y_n)$ ist wiederum Cauchy-Folge:

  $$(x_n+y_n)-(x_m+y_m) \overset{\text{abelsch}}{=} \underbrace{(x_n - x_m)}_{\in \mathcal{O}_U \forall n,m \geq n_1} + \underbrace{(y_n - y_m)}_{\in \mathcal{O}_U \forall n,m \geq n_2} \in \mathcal{O}_U + \mathcal{O}_U \subset U \ \forall n, m \geq \max\{n_1, n_2\}$$

- $-_{\hat{G}}$ ist wohldefiniert:
  Sei $(x_n) \sim (y_n)$. Dann ist $(-y_n) - (-x_n) = x_n - y_n \in U \ \forall n \geq n_0$, also $(-y_n) \sim (-x_n)$.

- $+_{\hat{G}}$ ist wohldefiniert:
  Seien $(x_n) \sim (\tilde{x}_n), (y_n) \sim (\tilde{y}_n)$. Dann ist
  $(x_n + y_n) - (\tilde{x}_n - \tilde{y}_n) = \underbrace{(x_n - \tilde{x}_n)}_{\in \mathcal{O}_U \forall n \geq n_1} + \underbrace{(y_n - \tilde{y}_n)}_{\in \mathcal{O}_U \forall n \geq n_2} \in \mathcal{O}_U + \mathcal{O}_U \subset U \ \forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$, also $(x_n + y_n) \sim (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)$.

- Die Gruppeneigenschaften und die Kommutativität übertragen sich direkt. Die Null ist $0_{\hat{G}} = [(0_G)]_\sim = \Phi(0)$. Außerdem ist $-[(x_n)]_\sim = [(-x_n)]_\sim$.

- Φ ist ein Homomorphismus nach Definition von $+_{\hat{G}}$.

- $\mathcal{T}_{\hat{G}}$ ist eine Topologie auf $\hat{G}$:
  - $\emptyset \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$ ist klar.
  - $\hat{G} \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$ folgt mit $\mathcal{O} := G$.
  - Seien $\hat{\mathcal{O}}_\alpha \in \mathcal{T}_{\hat{G}} \ \forall \alpha \in \mathcal{I}$. Für jedes $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \hat{\mathcal{O}}_\alpha$ gilt dann $x \in \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\alpha}}$ für ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{I}$. Daher gibt es $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \hat{\mathcal{O}}_\alpha$. Daraus folgt $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \hat{\mathcal{O}}_\alpha \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$.
  - Seien $\hat{\mathcal{O}}_i \in \mathcal{T}_{\hat{G}} \ \forall i = 1, \ldots, n, x \in \bigcap_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i$. Dann gibt es $\mathcal{O}_i \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x + CF(\mathcal{O}_i) \subset \hat{\mathcal{O}}_i$. Setze $\mathcal{O} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{U}_0(0)$. Dann ist $x + CF(\mathcal{O}) \subset x + CF(\mathcal{O}_i) \subset \hat{\mathcal{O}}_i \ \forall i = 1, \ldots, n$, also $x + CF(\mathcal{O}) \subset \bigcap_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i$, d.h. $\bigcap_{i=1}^n \hat{\mathcal{O}}_i \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$.

- **Sublemma:** Für $U \in \mathcal{U}(0), x \in \hat{G}$ ist $x + CF(U) \in \mathcal{U}(x)$.
  Beweis: Setze $\hat{U} := x + CF(U), \hat{V} := \{y \in \hat{U} | \exists \mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0) : y + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}\} \subset \hat{U}$.
  Zu $y \in \hat{V}$ gibt es dann $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $y + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Wähle $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\tilde{\mathcal{O}} + \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$, und sei $\tilde{y} \in y + CF(\tilde{\mathcal{O}})$ beliebig. Dann ist $\tilde{y} + CF(\tilde{\mathcal{O}}) \subset y + CF(\tilde{\mathcal{O}}) + CF(\tilde{\mathcal{O}}) \subset y + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$, also $\tilde{y} \in \hat{V}$ nach Definition von $\hat{V}$. Weil $\tilde{y}$ beliebig war, folgt $y + CF(\tilde{\mathcal{O}}) \subset \hat{V}$, und weil y beliebig war, folgt nach Definition $\hat{V} \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$. Wegen $x \in \hat{V} \subset \hat{U}$ hat man daher $\hat{U} \in \mathcal{U}(x)$.
  Korollar: $\mathcal{U}(x) = \{\hat{U} \subset \hat{G} | \exists \mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0) : x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}\}$
  Beweis: Sei $\hat{U} \in \mathcal{U}(x)$, d.h. $\exists \hat{\mathcal{O}} \subset \hat{U}, x \in \hat{\mathcal{O}} \in \mathcal{T}_{\hat{G}}$. Dann gibt es nach Definition von $\mathcal{T}_{\hat{G}}$ ein $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{\mathcal{O}} \subset \hat{U}$. Gibt es umgekehrt $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$, so ist $\hat{U}$ Obermenge der Umgebung $x + CF(\mathcal{O}) \in \mathcal{U}(x)$ von x und daher ebenfalls Umgebung von x.

- Das Diagramm
  $$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{-_G} & G \\ \downarrow^{\Phi} & & \downarrow^{\Phi} \\ \hat{G} & \xrightarrow{-_{\hat{G}}} & \hat{G} \end{array}$$
  ist kommutativ: $-\Phi(x) = -\left[(x)\right]_\sim = \left[(-x)\right]_\sim = \Phi(-x)$.

- Das Diagramm
  $$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{+_G} & G \\ \downarrow^{\Phi \times \Phi} & & \downarrow^{\Phi} \\ \hat{G} \times \hat{G} & \xrightarrow{+_{\hat{G}}} & \hat{G} \end{array}$$
  ist kommutativ: $\Phi(x) + \Phi(y) = \left[(x)\right]_\sim + \left[(y)\right]_\sim = \left[(x + y)\right]_\sim = \Phi(x + y)$.

- $\hat{s} : \hat{G} \to \hat{G}, (x, y) \mapsto x - y$ ist stetig ($\Rightarrow +_{\hat{G}}$ und $-_{\hat{G}}$ sind stetig):
  Seien $x, y \in \hat{G}, \hat{U} \in \mathcal{U}(x - y)$. Dann gibt es $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x - y + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Wähle $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\tilde{\mathcal{O}} - \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$. Dann ist $\hat{s}(x + CF(\tilde{\mathcal{O}}), y + CF(\tilde{\mathcal{O}})) = x - y + CF(\tilde{\mathcal{O}}) - CF(\tilde{\mathcal{O}}) \subset x - y + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$, also $s^{-1}(\hat{U}) \supset \left(x + CF(\tilde{\mathcal{O}})\right) \times \left(y + CF(\tilde{\mathcal{O}})\right) \in \mathcal{U}\left((x, y)\right)$, und daher ist $\hat{s}$ stetig in (x, y), wobei $x, y \in \hat{G}$ beliebig waren.

- Φ ist stetig:
  Sei $\hat{U} \in \mathcal{U}\left(\Phi(g)\right)$. Dann gibt es $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\Phi(g) + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Es ist dann $\Phi(g + \mathcal{O}) = \Phi(g) + \Phi(\mathcal{O}) \subset \Phi(g) + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$ und somit $\Phi^{-1}(\hat{U}) \supset g + \mathcal{O} \in \mathcal{U}(g)$. Also ist Φ stetig in jedem $g \in G$, folglich stetig auf G.

Satz 2

Es gilt für jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset G$ gilt $\Phi(x_n) \to \left[(x_n)\right]_\sim$. Insbesondere liegt $\Phi(G)$ dicht in $\hat{G}$, d.h. $\overline{\Phi(G)} = \hat{G}$.

Beweis:

Setze $x := \left[(x_n)\right]_\sim$. Sei $\hat{U} \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Weil (x_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in \mathcal{O}\ \forall n, m \geq n_0$. Daraus folgt aber $\Phi(x_n) - x = \left[(x_n - x_k)_{k \in \mathbb{N}}\right]_\sim = \left[(0, 0, 0, \dots, 0, x_n - x_{n_0}, x_n - x_{n_0+1}, x_n - x_{n_0+2}, \dots)\right]_\sim \in CF(\mathcal{O})\ \forall n \geq n_0$. Das bedeutet $\Phi(x_n) \in x + CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}\ \forall n \geq n_0$, was nach Definition $\Phi(x_n) \to x$ heißt.

Satz 3
$(\hat{G}, \mathcal{T}_{\hat{G}})$ ist ein Hausdorff-Raum.

Beweis:
Seien $x \neq y \in \hat{G}, x = [(x_n)]_\sim, y = [(y_n)]_\sim$, also $x_n - y_n \not\to 0$. Das bedeutet gerade: $\exists U \in \mathcal{U}(0) : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : x_n - y_n \notin U$.
Wähle $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1 \subset U, \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.
Ann.: $0 \in (x + CF(\mathcal{O}_2)) - (y + CF(\mathcal{O}_2)) \subset x - y + CF(\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2) \subset x - y + CF(\mathcal{O}_1)$
Das heißt, es gibt $(g_n) \subset \mathcal{O}_1$ mit $x_n - y_n - g_n \to 0$, also $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n - y_n - g_n \in \mathcal{O}_1\ \forall n \geq n_0$.
Daraus folgt $x_n - y_n \in g_n + \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1 \subset U\ \forall n \geq n_0$ im Widerspruch zur Wahl von U.
Also gilt $0 \notin (x + CF(\mathcal{O}_2)) - (y + CF(\mathcal{O}_2))$, d.h. $(x + CF(\mathcal{O}_2)) \cap (y + CF(\mathcal{O}_2)) = \emptyset$.
Weil $x \neq y \in \hat{G}$ beliebig waren, folgt definitionsgemäß, daß $\hat{G}$ hausdorff'sch ist, denn $x + CF(\mathcal{O}_2) \in \mathcal{U}(x)$ und $y + CF(\mathcal{O}_2) \in \mathcal{U}(y)$.

Definition (*Vollständigkeit*)
Eine topologische abelsche Gruppe $(G, \mathcal{T}_G, +)$ heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in G genau einen Grenzwert besitzt.

Satz 4
Ist G vollständig, so gilt $G \cong \hat{G}$. Speziell ist Φ ein bistetiger Isomorphismus von G nach $\hat{G}$. Insbesondere ist jede vollständige topologische abelsche Gruppe hausdorff'sch.

Beweis:
Man muß nur noch die Bijekivität von Φ und die Stetigkeit von Φ^{-1} zeigen:
Sei $\hat{x} = [(x_n)]_\sim \in \hat{G}$ beliebig. Es gilt dann $\Phi(x_n) \to \hat{x}$. Nach Voraussetzung gibt es aber auch ein $x \in G$ mit $x_n \to x$, so daß wegen (Folgen-)Stetigkeit von Φ auch $\Phi(x_n) \to \Phi(x)$ gilt. Im Hausdorff-Raum $\hat{G}$ sind Grenzwerte eindeutig, also hat man $\hat{x} = \Phi(x) \in \operatorname{Bild} \Phi$, und damit ist Φ surjektiv.
Für die Injektivität muß man nur $H = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(0)} U = \{0\}$ zeigen. Für jedes $x \in H$ gilt aber definitionsgemäß $x \to 0$ und natürlich $x \to x$, also wegen Eindeutigkeit $x = 0$.
Für die Stetigkeit von Φ^{-1} in $\hat{x} \in \hat{G}$ muß man für jedes $U \in \mathcal{U}(x), x := \Phi^{-1}(\hat{x})$ zeigen, daß $\left(\Phi^{-1}\right)^{-1}(U) = \Phi(U) \in \mathcal{U}(\hat{x})$ gilt. Sei also $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig. Dann ist $U - x \in \mathcal{U}(0)$ und es gibt $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\mathcal{O} - \mathcal{O} \subset U - x$. Für jede Cauchy-Folge $(g_n) \subset \mathcal{O}$ gibt es nach Voraussetzung ein $g \in G$ mit $g_n \to g$, speziell also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g_n - g \in \mathcal{O}\ \forall n \geq n_0$. Dann ist $\Phi(g) = [(g_n)]_\sim$ und $g \in g_n - \mathcal{O} \subset \mathcal{O} - \mathcal{O} \subset U - x\ \forall n \geq n_0$, also $[(g_n)]_\sim \in \Phi(U - x)$ und damit $CF(\mathcal{O}) \subset \Phi(U - x)$.
Damit folgt $\Phi(U) = \Phi(x) + \Phi(U - x) \supset \hat{x} + CF(\mathcal{O}) \in \mathcal{U}(\hat{x})$, und dies war die Behauptung.

Lemma 4
Seien $\tilde{U}, U \in \mathcal{U}(0)$ mit $\tilde{U} - \tilde{U} \subset U$. Dann gilt $\Phi^{-1}\left(CF(\tilde{U})\right) \subset U$.
Man kann dies äquivalent auch so formulieren: $\left(\Phi^{-1}(\hat{U})\right)_{\hat{U} \in \mathcal{U}(0)}$ ist eine Umgebungsbasis der 0.

Beweis:
Sei $x \in \Phi^{-1}\left(CF(\tilde{U})\right)$, d.h. $\Phi(x) \in CF(\tilde{U})$. Dann gibt es also eine Cauchy-Folge $(x_n) \subset \tilde{U}$ mit $x - x_n \to 0$. Insbesondere gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x \in \tilde{U}\ \forall n \geq n_0$. Also folgt $x \in x_n - \tilde{U} \subset \tilde{U} + \tilde{U} \subset U\ \forall n \geq n_0$, also $x \in U$. Weil x beliebig war, folgt die Behauptung.

Satz 5

Im Falle, daß es in G eine abzählbare Umgebungsbasis der 0 gibt, ist $\hat{G}$ vollständig.

Bemerkung 7

In einer topologischen abelschen Gruppe ist die Forderung der Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis der 0 äquivalent mit der Forderung, daß $(G, \mathcal{T}_G)$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Beweis:

Die Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt aus der Hausdorff-Eigenschaft von $\hat{G}$.
Sei nun $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(0)$ eine Umgebungsbasis der 0 in G. O.B.d.A. gelte $U_{i+1} \subset U_i \; \forall i \in \mathbb{N}$, sonst gehe zu $\tilde{U}_n := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ über.

Sei $(x_n) \subset \hat{G}$ eine Cauchy-Folge. Weil $-U_n$ aufgrund der Stetigkeit von $-$ wiederum eine Umgebung der 0 ist, sind $x_n + CF(U_n), x_n + CF(-U_n)$ Umgebungen von x_n, also $(x_n + CF(U_n)) \cap (x_n + CF(-U_n)) \in \mathcal{U}(x_n)$. Wegen $\overline{\Phi(G)} = \hat{G}$ gibt es daher für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in G$ mit $\Phi(y_n) \in (x_n + CF(U_n)) \cap (x_n + CF(-U_n))$.

- (y_n) ist Cauchy-Folge:
  Sei $U \in \mathcal{U}(0)$. Wähle $\tilde{U}, \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\tilde{U} - \tilde{U} \subset U, \mathcal{O} + \mathcal{O} \subset \tilde{U}, \tilde{\mathcal{O}} + \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $U_i \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Weil (x_n) eine Cauchy-Folge ist und $CF(\mathcal{O}) \in \mathcal{U}(0)$ gilt, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in CF(\mathcal{O}) \; \forall n, m \geq n_0$.
  Es ist dann $\Phi(y_n - y_m) = \Phi(y_n) - x_n + x_n - x_m + x_m - \Phi(y_m) \in CF(U_n) + CF(\mathcal{O}) + (-CF(-U_n)) \subset CF(U_i) + CF(U_i) + CF(\mathcal{O}) \subset CF(\mathcal{O}) + CF(\mathcal{O}) \subset CF(\tilde{U}) \; \forall n, m \geq \max\{i, n_0\}$.
  Dies bedeutet $y_n - y_m \in \Phi^{-1}\left(CF(\tilde{U})\right) \subset U \; \forall m, n \geq \max\{i, n_0\}$. Weil U beliebig war, ist also (y_n) tatsächlich eine Cauchy-Folge.

- $x_n \to y := [(y_n)]_\sim$
  Sei $\hat{U} \in \mathcal{U}(0)$, d.h. $y + \hat{U}$ eine beliebige Umgebung von y. Es gibt ein $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Wähle ein $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $\tilde{\mathcal{O}} + \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $U_i \subset \tilde{\mathcal{O}}$, und wegen $CF(\tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{U}(0)$ und $\Phi(y_n) \to y$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(y_n) - y \in CF(\tilde{\mathcal{O}}) \; \forall n \geq n_0$. Dann gilt $x_n - y = x_n - \Phi(y_n) + \Phi(y_n) - y \in CF(U_n) + CF(\tilde{\mathcal{O}}) \subset CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U} \; \forall n \geq \max\{i, n_0\}$. Weil $\hat{U}$ beliebig war, heißt dies $x_n \to y$.

Satz 6

Seien G und H topologische abelsche Gruppen, $f : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus. Dann gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{f} : \hat{G} \to \hat{H}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow^{\Phi_G} & & \downarrow^{\Phi_H} \\ \hat{G} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{H} \end{array}$$

kommutativ ist. $\hat{f}$ ist gegeben durch $\hat{f}\left([(x_n)]_\sim\right) := [(f(x_n))]_\sim$.

Beweis:

EXISTENZ:

Sei (x_n) eine Cauchy-Folge, $U \in \mathcal{U}(0)$. Dann ist wegen Stetigkeit auch $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(0)$, und es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x_m \in f^{-1}(U) \; \forall n, m \geq n_0$. Damit ist dann $f(x_n) - f(x_m) = f(x_n - x_m) \in f\left(f^{-1}(U)\right) \subset U \; \forall n, m \geq n_0$, d.h. $(f(x_n))$ ist eine Cauchy-Folge.

Sei nun $(x_n) \sim (\tilde{x}_n)$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - \tilde{x}_n \in f^{-1}(U)$ $\forall n \geq n_0$ und daher ist $f(x_n) - f(\tilde{x}_n) = f(x_n - \tilde{x}_n) \in f\left(f^{-1}(U)\right) \subset U$ $\forall n \geq n_0$, also $f(x_n) \sim f(\tilde{x}_n)$.
Somit ist $\hat{f} : \hat{G} \to \hat{H}, [(x_n)]_\sim \mapsto [(f(x_n))]_\sim$ wohldefiniert.
Die Homomorphie von $\hat{f}$ und die Kommutativität des Diagramms folgen direkt aus der Definition. $\hat{f}$ ist auch stetig, denn sei $x \in \hat{G}, \hat{U}_2 \in \mathcal{U}(\hat{f}(x))$. Dann gibt es $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $f(x) + CF(\mathcal{O}_2) \subset \hat{U}_2$. Es ist $\mathcal{O}_1 := f^{-1}(\mathcal{O}_2) \in \mathcal{U}_0(0)$ wegen Stetigkeit von f und wegen $f(0) = 0$. Für jede Cauchy-Folge $(g_n) \subset \mathcal{O}_1$ gilt dann $\hat{f}(x + [(g_n)]_\sim) = \hat{f}(x) + [(f(g_n))]_\sim \in \hat{f}(x) + CF(f(\mathcal{O}_1)) \subset \hat{f}(x) + CF(\mathcal{O}_2) \subset \hat{U}_2$, d.h. $x + [(g_n)]_\sim \in \hat{f}^{-1}(\hat{U}_2)$. Also ist $\hat{f}^{-1}(\hat{U}_2) \supset x + CF(\mathcal{O}_1) \in \mathcal{U}(x)$, somit $\hat{f}$ stetig in x.

Eindeutigkeit:
Sei $\hat{f} : \hat{G} \to \hat{H}$ eine beliebige stetige Funktion, so daß das obige Diagramm kommutativ ist. Insbesondere ist $\hat{f}$ dann auch folgenstetig, d.h. $(x_n) \to x \Rightarrow (f(x_n)) \to f(x)$.
Für jedes $x = [(x_n)]_\sim \in \hat{G}$ gilt dann $\hat{f}(x) \leftarrow \hat{f}\left(\Phi_G(x_n)\right) = \Phi_H\left(f(x_n)\right) \to [(f(x_n))]_\sim$.
Weil $\hat{H}$ hausdorff'sch ist, ist der Grenzwert eindeutig und es gilt $\hat{f}(x) = [(f(x_n))]_\sim$.

Bemerkung 8

An der Darstellung von $\hat{f}$ kann man für $g : G \to H$ und $h : H \to K$ direkt die Gleichung $\widehat{h \circ g} = \hat{h} \circ \hat{g}$ ablesen.

Bemerkung 9

Die Konstruktion von $\hat{f}$ verläuft analog zur Fortsetzung stetiger Funktionen auf die Vervollständigung im Falle metrischer Räume. Man benötigt dafür allerdings eine gleichmäßige Stetigkeit der Funktion, was man im metrischen Fall direkt fordern kann, aber auch wie hier durch die Forderung der Linearität der Funktion erreicht.

Definition (*universelle Eigenschaft der Vorvollständigung*)

Für eine topologische Gruppe G heißt ein Paar $(\hat{G}, \Phi)$ einer vollständigen topologischen abelschen Gruppe $\hat{G}$ und eines stetigen Homomorphismus $\Phi : G \to \hat{G}$ *Vervollständigung* von G, falls es zu jedem stetigen Homomorphismus $f : G \to H$ in eine vollständige topologische abelsche Gruppe H genau einen stetigen Homomorphismus $\hat{f} : \hat{G} \to H$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f"] & \hat{G} \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Satz 7

Die Vervollständigung ist eindeutig, d.h. zu je zwei Vervollständigungen $(\hat{G}_1, \Phi_1)$ und $(\hat{G}_2, \Phi_2)$ gibt es einen bistetigen Isomorphismus $J : \hat{G}_1 \to \hat{G}_2$, so daß $J \circ \Phi_1 = \Phi_2$ gilt.

Beweis:

Nach Definition der Vervollständigung gibt es eindeutige stetige Homomorphismen $\hat{\Phi}_1 : \hat{G}_2 \to \hat{G}_1$ und $\hat{\Phi}_2 : \hat{G}_1 \to \hat{G}_2$, so daß die folgenden beiden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[dr, "\Phi_2"] & \hat{G}_1 \arrow[d, "\hat{\Phi}_2"] \\ & \hat{G}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[dr, "\Phi_1"] & \hat{G}_2 \arrow[d, "\hat{\Phi}_1"] \\ & \hat{G}_1 \end{tikzcd}$$

Daher sind also auch die folgenden beiden Diagramme kommutativ mit stetigen Homomorphismen.

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\Phi_1} & \hat{G}_1 \\
 & \searrow^{\Phi_1} & \downarrow^{\hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1} \\
 & & \hat{G}_1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\Phi_2} & \hat{G}_2 \\
 & \searrow^{\Phi_2} & \downarrow^{\hat{\Phi}_1 \circ \hat{\Phi}_2} \\
 & & \hat{G}_2
\end{array}
$$

Allerdings werden diese Diagramme auch mittels der Identität auf $\hat{G}_1$ bzw. $\hat{G}_2$ kommutativ, welche ebenfalls stetige Homomorphismen sind, und wegen Eindeutigkeit gilt daher $\hat{\Phi}_1 \circ \hat{\Phi}_2 = \text{id}$ und $\hat{\Phi}_2 \circ \hat{\Phi}_1 = \text{id}$. Daher ist $\hat{\Phi}_2$ stetig und invertierbar mit stetiger Umkehrfunktion $\hat{\Phi}_1$ und $\hat{\Phi}_2 \circ \Phi_1 = \Phi_2$, also gerade ein J wie gesucht.

Satz 8

Falls G eine abzählbare Umgebungsbasis der 0 besitzt, so existiert eine Vervollständigung. Diese ist gegeben durch $(\hat{G}, \Phi_G), \hat{G} = G/\sim$ wie bereits definiert und untersucht.

Beweis:

Man muß nur die universelle Eigenschaft für $\hat{G}$ nachrechnen, denn $\hat{G}$ ist bereits als topologische abelsche Gruppe und Φ als stetiger Homomorphismus nachgewiesen.
Sei also H eine vollständige topologische abelsche Gruppe, $f : G \to H$ ein stetiger Homomorphismus. Dann ist $\Phi_H : H \to \hat{H}$ ein bistetiger Isomorphismus, und es gibt genau ein stetiges $\hat{f}_1 : \hat{G} \to \hat{H}$, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{f} & H \\
\downarrow^{\Phi_G} & & \downarrow^{\Phi_H} \\
\hat{G} & \xrightarrow{\hat{f}_1} & \hat{H}
\end{array}
$$

$\hat{f} := \Phi_H^{-1} \circ \hat{f}_1$ ist nun ein stetiger Homomorphismus, so daß das Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\Phi_G} & \hat{G} \\
 & \searrow^{f} & \downarrow^{\hat{f}} \\
 & & H
\end{array}
$$

kommutativ ist. $\hat{f}$ ist auch eindeutig. Denn sei $\hat{g} : \hat{G} \to H$ ein weiterer stetiger Homomorphismus dieser Eigenschaft, so kann man im ersten Diagramm statt $\hat{f}_1$ auch den stetigen Homomorphismus $\Phi_H \circ \hat{g}$ einsetzen, und das Diagramm bleibt kommutativ. Also gilt wegen Eindeutigkeit $\Phi_H \circ \hat{g} = \hat{f}_1$, also $\hat{g} = \Phi_H^{-1} \circ \hat{f}_1 = \hat{f}$, und damit ist auch $\hat{f}$ eindeutig durch die Forderung nach Stetigkeit und Kommutativität des Diagramms bestimmt.
Insgesamt bedeutet dies also, daß $\hat{G}$ eine Vervollständigung von G ist.

Beispiel 1

Wenn man spezieller den Fall einer Gruppe G mit einer Halbnorm $\|\cdot\| : G \to [0, \infty)$ untersucht und die von dieser Norm induzierte Topologie betrachtet, indem man mit den Kugeln $B(x_0, r) := \{x \in G : \|x - x_0\| < r\}$ die Basis $\mathcal{B} := \{B(x, r) | x \in G, r \in \mathbb{R}\}$ als Erzeuger der Topologie fixiert, so kann man diese Vervollständigung auch anders erhalten:
Es ist klar, daß $\overline{\{0\}} = \{x \in G : \|x\| = 0\}$ gilt, da man diese Punkte nie von der 0 trennen kann, während sich Punkte mit $\|x\| = \delta > 0$ durch Kugeln der Größe $\delta/2$ von 0 separieren lassen. Daraus wird klar, daß diese Halbnorm genau dann eine Norm ist, wenn die topologische Gruppe hausdorff'sch ist.

Zudem folgt nun, daß diese Halbnorm eine Norm auf G/H ($H := \overline{\{0\}}$) induziert mittels $\|a+H\| := \|a\|$; diese Norm ist wohldefiniert wegen $\|a\| - \|b\| \leq \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ und wirklich eine Norm – man identifiziert hierbei einfach Punkte vom Abstand 0 miteinander.
Nun hat man den gewöhnlichen Fall eines normierten Raumes vorliegen und kann analytisch vervollständigen. Die hierbei entstehende Vervollständigung entspricht gerade unserem $\hat{G}$, was hier aber nicht nachgewiesen werden soll.

Beispiel 2

Man kann eine Gruppe stets wie folgt zu einer topologischen Gruppe machen:
Man gibt sich eine absteigende Kette von Untergruppen $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots$ vor und faßt diese Untergruppen als eine Umgebungsbasis der 0 auf, d.h. $U \in \mathcal{U}(0) :\Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ G_i \subset U$.
Man setzt nun $\mathcal{U}(a) := a + \mathcal{U}(0)$ und $\mathcal{T}_G := \{\mathcal{O} \subset G | \forall x \in \mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathcal{U}(x)\}$. Man überlegt sich recht einfach, daß dies tatsächlich eine Topologie ist.
Für die Stetigkeit von $s(x,y) := x - y$ seien $x, y \in G$ beliebig, $U \in \mathcal{U}(a-b)$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x - y + G_i \subset U$. Es gilt $s(x + G_i, y + G_i) = x + G_i - y - G_i = x - y + G_i \subset U$, d.h. $s^{-1}(U) \supset (x + G_i) \times (y + G_i) \in \mathcal{U}((x,y))$. Also ist s stetig in jedem $(x,y) \in G \times G$, und daher G eine topologische Gruppe.
Die G_i sind offen und abgeschlossen für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Offenheit folgt aus der Tatsache, daß für alle $g \in G_i$ die Gleichheit $G_i = g + G_i \in \mathcal{U}(g)$ gilt und damit G_i Umgebung aller seine Punkte ist. Die Abgeschlossenheit folgt aus der Darstellung $G_i = G \setminus \bigcup\limits_{g \notin G_i} (g + G_i)$ als Komplement einer Vereinigung offener Mengen. Eine zu dieser Topologie passende Halbnorm ist $\|x\| := \exp(-\sup\{n \in \mathbb{N}_0 | x \in G_n\})$ mit der Konvention $\exp(-\infty) := 0$.
Nach Definition der Topologie besitzt die $0 \in G$ eine abzählbare Umgebungsbasis. Somit ist $\hat{G}$ vollständig.
Man kann die Vervollständigung $\hat{G}_n$ der mit der Unterraumtopologie versehenen Untergruppe G_n als Untergruppe von $\hat{G}$ auffassen mittels des eindeutig bestimmten stetigen Homomorphismus $\hat{i}_n$, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_n & \overset{i_n}{\hookrightarrow} & G \\ \downarrow^{\Phi_{G_n}} & & \downarrow^{\Phi_G} \\ \hat{G}_n & \overset{\hat{i}_n}{\hookrightarrow} & \hat{G} \end{array}$$

kommutativ ist, i_n die kanonische Einbettung von G_n in G. $\hat{i}_n$ ist nämlich sogar injektiv, denn sei $x \in \mathrm{Kern}\, \hat{i}_n$, d.h. $\hat{i}_n(x) = [(i_n(x_k))]_\sim = 0_{\hat{G}}$. Dann gilt $i_n(x_k) \to 0_G$ und damit $x_k \to 0_{G_n}$, da $G_n \in \mathcal{U}(0)$. Daher ist $x = [(x_n)]_\sim = 0_{\hat{G}_n}$, insgesamt also $\mathrm{Kern}\, \hat{i}_n = \{0_{\hat{G}_n}\}$.
$\hat{i}_n$ ist also eine Einbettung von $\hat{G}_n$ in $\hat{G}$, und man macht sich klar, daß die Unterraumtopologie von $\hat{G}_n$ bezüglich $\hat{G}$ mit $\mathcal{T}_{\hat{G}_n}$ übereinstimmt, weil die Umgebungen der 0 wegen $G_n \in \mathcal{U}(0)$ übereinstimmen.
Die von den Untergruppen $\hat{G} = \hat{G}_0 \geq \hat{G}_1 \geq \hat{G}_2 \geq \ldots$ erzeugte Topologie auf $\hat{G}$ ist dann die Topologie $\mathcal{T}_{\hat{G}}$; dafür ist $\hat{U} \in \mathcal{U}(0) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \hat{G}_k \subset \hat{U}$ zu zeigen. Sei also $\hat{U} \in \mathcal{U}(0)$. Dann gibt es $\mathcal{O} \in \mathcal{U}_0(0)$ mit $CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Nach Definition von $\mathcal{T}_G$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $G_k \subset \mathcal{O}$, also $\hat{G}_k = CF(G_k) \subset CF(\mathcal{O}) \subset \hat{U}$. Gibt es umgekehrt $k \in \mathbb{N}$ mit $\hat{G}_k \subset \hat{U}$, so ist $\hat{U} \supset \hat{G}_k = CF(G_k) \in \mathcal{U}(0)$, also $\hat{U} \in \mathcal{U}(0)$.

Bemerkung 10

Im Fall dieser Topologie kann man auf nochmals eine andere Art zur Vervollständigung gelangen:
Man beobachtet, daß es für jede Cauchy-Folge (x_k) und jedes $n \in \mathbb{N}$ definitionsgemäß ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k - x_l \in G_n\ \forall k, l \geq k_0$. Dies heißt lediglich, daß die Folge $x_k + G_n$ schließlich konstant wird. Wir bezeichnen für eine fixierte Cauchy-Folge diesen Wert mit ξ_n. Es ist direkt klar, daß

unter der kanonischen Projektion $G/G_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} G/G_n$ stets $\theta_{n+1}\xi_{n+1} = \xi_n$ gelten muß.
Eine Folge $(\xi_n), \xi_i \in G/G_i$ heißt kohärente Folge, falls $\theta_{n+1}\xi_{n+1} = \xi_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Wir haben gerade gesehen, daß man jeder Cauchy-Folge eindeutig eine kohärente Folge zuordnen kann. Umgekehrt kann man zu jeder kohärenten Folgen eine erzeugende Cauchy-Folge finden, indem man $x_n \in \xi_n$ beliebig wählt für $n \in \mathbb{N}$, denn dann ist $x_k - x_l \in G_n \ \forall k, l \geq n$; und jede Umgebung von 0 enthält ja ein G_n. Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge.
Weiterhin ist klar, daß äquivalente Cauchy-Folgen (x_k) und $(\tilde{x}_k)$ gleiche kohärente Folgen liefern, da es zu jedem G_n ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k - \tilde{x}_k \in G_n \ \forall k \geq k_0$, die Folgen also schließlich beide nach ξ_n führen.
Zudem ist die Zuordnung injektiv modulo Äquivalenz, denn führen zwei Cauchy-Folgen $(x_k), (y_k)$ auf die gleiche kohärente Folge, so findet man zu jedem G_n ein ξ_n und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k, y_k \in \xi_n \ \forall k \geq k_0$, also $x_k - y_k \in G_n \ \forall k \geq k_0$. Und da die G_n eine Umgebungsbasis der 0 sind, heißt das $x_k - y_k \to 0$, also $(x_k) \sim (y_k)$.
Hier haben wir also eine Bijektion von $\hat{G}$ in die kohärenten Folgen gefunden, die mit der natürlichen Addition $(\xi_n^{(1)}) + (\xi_n^{(2)}) := (\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)})$ zum Isomorphismus wird.
Wir definieren schließlich auf den kohärenten Folgen die vorwärts induzierte Topologie und bekommen dadurch nun sogar einen Homöomorphismus.

Definition (*inverses System, inverser Limes*)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gruppen, $\theta_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$ Homomorphismen.
Das Paar $((A_n), (\theta_n))$ heißt *inverses System.* Die Gruppe der kohärenten Folgen (a_n), d.h. der Folgen (a_n) mit $a_n \in A_n, \theta_{n+1}a_{n+1} = a_n$ heißt *inverser Limes* des Systems, und man schreibt $\varprojlim A_n$. Im Fall, daß die θ_n surjektiv sind, spricht man von einem *sujektiven inversen System.*

Bemerkung 11

Wir hatten soeben gesehen, daß $\hat{G} \cong \varprojlim G/G_n$ als topologische abelsche Gruppe. Ein Vorteil der Sichtweise als inverser Limes ist, daß man eine eindeutige Darstellung der Elemente hat im Gegensatz zu Klassen von Cauchy-Folgen.

Beispiel 3

$G = \mathbb{Z}$, $G_n := p^n\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl p. Hier sind die kohärenten Folgen Folgen von Restklassen $a_n + p^n\mathbb{Z}$, so daß $a_n \equiv a_m \pmod{p^n} \ \forall n < m$.
Man kann hier $\hat{G}$ schreiben als die Menge der formalen Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i, 0 \leq a_i \leq p-1$.
In diesem Fall spricht man von den p-adischen Zahlen.
Ein Element ist "klein" in der Topologie, wenn die ersten a_i verschwinden. Insbesondere gilt $p^n \to 0$, denn $p^k \in G_n \Leftrightarrow n \leq k$.
Beispiel einer kohärenten Folge: $(\mathbb{Z}, 3 + p\mathbb{Z}, 3 + 2p + p^2\mathbb{Z}, 3 + 2p + 4p^2 + p^3\mathbb{Z}, \dots)$.

Satz 9

Seien $(A_n), (B_n), (C_n)$ inverse Systeme, und sei das folgende Diagramm kommutativ mit exakten Zeilen für jedes $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \to & A_{n+1} & \to & B_{n+1} & \to & C_{n+1} & \to & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & \to & A_n & \to & B_n & \to & C_n & \to & \{0\}
\end{array}$$

Man nennt diesen Fall eine *exakte Sequenz inverser Systeme* und scheibt auch

$$\{0\} \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to \{0\}$$

Dann ist auch die Sequenz $\{0\} \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$ exakt.
Falls zudem (A_n) surjektiv ist, so ist $\{0\} \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to \{0\}$ exakt.

Beweis:
Die Abbildung ist wohldefiniert, weil das Diagramm kommutativ ist, folglich also die komponentenweise Abbildung einer kohärenten Folge wieder eine kohärente Folge liefert.
Definiere nun $A := \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n, d^A := A \to A, (a_n) \mapsto (a_n - \theta_{n+1}a_{n+1})$. Offenbar ist $\mathrm{Kern}\, d^A = \varprojlim A_n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \to & A & \to & B & \to & C & \to & \{0\} \\ & & \downarrow^{d^A} & & \downarrow^{d^B} & & \downarrow^{d^C} & & \\ \{0\} & \to & A & \to & B & \to & C & \to & \{0\} \end{array}$$

ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Nach dem Schlangenlemma ist also folgende Sequenz wiederum exakt:

$$\{0\} \to \mathrm{Kern}\, d^A \to \mathrm{Kern}\, d^B \to \mathrm{Kern}\, d^C \to \mathrm{Cokern}\, d^A \to \mathrm{Cokern}\, d^B \to \mathrm{Cokern}\, d^C \to \{0\}$$

Dies ist bereits der erste Teil der Aussage.
Für den zweiten sei nun (A_n) surjektiv. Es ist $\mathrm{Cokern}\, d^A = \{0\}$ zu zeigen.
Dies ist äquivalent damit, daß d^A surjektiv ist, also das System $x_n - \theta_{n+1}x_{n+1} = a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ für jede Folge (a_n) eine Lösung besitzt. Dies ist aber klar, denn wähle x_1 beliebig und induktiv x_{n+1} so, daß $\theta_{n+1}x_{n+1} = x_n - a_n$, was stets möglich ist wegen Surjektivität der θ_{n+1}.

Korollar 1
Sei $\{0\} \to G' \hookrightarrow G \overset{p}{\twoheadrightarrow} G'' \to \{0\}$ exakt, $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \dots$ Untergruppen und G mit der von den G_i induzierten Topologie versehen. Wir fassen G' als Teilmenge von G auf und versehen G' mit der Topologie, die von $(G_n \cap G')$ erzeugt wird, sowie G'' mit der von (pG_n) erzeugten.
Dann ist $\{0\} \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to \{0\}$ wiederum exakt.

Beweis:
Man betrachtet die exakte Sequenz inverser Systeme

$$\{0\} \to G'/\left(G' \cap G_n\right) \to G/G_n \to G''/pG_n \to \{0\}$$

mit den Komponentenabbildungen $x + (G' \cap G_n) \mapsto x + G_n \mapsto px + pG_n$ und wendet darauf den vorigen Satz an.

Korollar 2
$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n$

Beweis:
Wähle im vorigen Korollar speziell $G' := G_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachte die exakte Sequenz

$$\{0\} \to G' \to G \to G'' \to \{0\}$$

wobei $G'' := G/G'$ versehen ist mit der Quotiententopologie, also der von $p : G \to G/G', x \mapsto x + G'$ vorwärts induzierten Topologie.
Dann ist $\{0 + G'\} \in \mathcal{T}_{G/G'}$ wegen $p^{-1}\left(\{0 + G'\}\right) = G' \in \mathcal{T}_G$ und daher $\{0 + G'\} \in \mathcal{U}(0)$. Also gibt es für jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset G/G'$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $x_n - x_m = 0 + G' \ \forall n, m \geq n_0$ ist,

d.h. die Folge ist schließlich konstant. Offenbar ist dann $\hat{G}'' \cong G''$.
Nach dem vorigen Korollar ist

$$\{0\} \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to \{0\}$$

exakt, also $\hat{G}/\hat{G}' \cong \hat{G}'' \cong G'' = G/G'$.

Korollar 3

Ist die Topologie einer topologischen abelschen Gruppe wie oben durch Untergruppen G_n erzeugt, so ist $\hat{\hat{G}} \cong \hat{G}$.

Bemerkung 12

Dies folgt auch direkt daraus, daß in G die 0 eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, daher also $\hat{G}$ vollständig ist.

Beweis:

Nach vorigem Korollar ist $\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Daher ist $\hat{\hat{G}} \cong \varprojlim \hat{G}/\hat{G}_n \cong \varprojlim G/G_n \cong \hat{G}$, denn die $\hat{G}_n$ erzeugen gerade die Topologie von $\hat{G}$.

Beispiel 4

Sei $G = A$ ein Ring, $\mathcal{A} \triangleleft A$ ein Ideal von A, $G_n := \mathcal{A}^n$. Hiervon wird die $\mathcal{A}$-*adische Topologie* erzeugt, bezüglich der A zum topologischen Ring wird: Sei $t : A \times A \to A, (x,y) \mapsto xy$. Zu $a, b \in A, U = ab + \mathcal{A}^n$ ist $(a + \mathcal{A}^n) \times (b + \mathcal{A}^n) \overset{\mathcal{A}^n \text{Ideal}}{\subset} t^{-1}(U)$ offen, also t in jedem Punkt $(a,b) \in A \times A$ stetig.
Man kann zeigen, daß auch $\hat{A}$ ein topologischer Ring ist und $\Phi : A \to \hat{A}$ ein stetiger Ringhomomorphismus ist. Natürlich ist $\operatorname{Kern} \Phi = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$.

Beispiel 5

Sei $M = G$ ein A-Modul, $\mathcal{A} \triangleleft A$ ein Ideal von A, $G_n := \mathcal{A}^n M$. Man spricht hier von der $\mathcal{A}$-*Topologie* auf M.
Auch hier ist wieder $\hat{M}$ ein topologischer $\hat{A}$-Modul, und jeder A-Modul-Homomorphismus $f : M \to N$ ist stetig in 0 wegen $f(\mathcal{A}^n M) = \mathcal{A}^n f(M) \subset \mathcal{A}^n N$, also $\mathcal{A}^n M \subset f^{-1}(\mathcal{A}^n N)$, und damit stetig auf ganz M. Folglich besitzt f auch eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$, und diese ist wieder ein Modul-Homomorphismus.

Beispiel 6

Konkret kann man $A = K[X]$ mit einem Körper K, $\mathcal{A} := (X)$ betrachten. Es ergibt sich $\hat{A} \cong K[[X]]$ die Menge der formalen Potenzreihen, wie man sich schnell anhand der kohärenten Folgen klar macht.
Eine kohärente Folge ist etwa:

$$(K[X], 1 + XK[X], 1 + 2X + X^2K[X], 1 + 2X + 5X^2 + X^3K[X], \dots)$$