Beweis des Schlangenlemmas

Robin Nittka

24. Januar 2005

Satz (Schlangenlemma)

Betrachte das folgende kommutative Diagramm, bei dem die mittleren beiden Zeilen exakt seien.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \operatorname{Kern} f' & \xrightarrow{\bar{u}} & \operatorname{Kern} f & \xrightarrow{\bar{v}} & \operatorname{Kern} f'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0\} & \rightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \rightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow^{f'} & & \downarrow^{f} & & \downarrow^{f''} & & \\
\{0\} & \rightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \rightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \operatorname{Cokern} f' & \xrightarrow{\bar{u}'} & \operatorname{Cokern} f & \xrightarrow{\bar{v}'} & \operatorname{Cokern} f'' & &
\end{array}$$

Hier ist $\bar{u}, \bar{v}$ die Restriktion von u bzw. v, und $\bar{u}', \bar{v}'$ ist die von u' bzw. v' induzierte Abbildung. Dann ist die folgende Sequenz wiederum exakt:

$$\{0\} \to \operatorname{Kern} f' \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Kern} f \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Kern} f'' \xrightarrow{d} \operatorname{Cokern} f' \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{Cokern} f \xrightarrow{\bar{v}'} \operatorname{Cokern} f'' \to \{0\}$$

Hierbei ist d folgendermassen definiert:
Sei $x'' \in \operatorname{Kern} f''$ beliebig vorgegeben. Da v surjektiv ist, gibt es ein $x \in M$ mit $v(x) = x''$. Nun gilt $v'(f(x)) = f''(v(x)) = f''(x'') = 0$, also $f(x) \in \operatorname{Kern} v' = \operatorname{Bild} u'$, daher $\exists y' \in N' : u'(y') = f(x)$. Nun definiert man $d(x'') := y' + \operatorname{Bild} f'$.

Bemerkung

Unter der Voraussetzung, daß d wohldefiniert ist, kann man auch schreiben:

$$d(x'') = y' + \operatorname{Bild} f' :\Longleftarrow \exists x \in M : v(x) = x'', u'(y') = f(x)$$

Beweis

- $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind wohldefiniert:

$$x' \in \operatorname{Kern} f' \Rightarrow f'(x') = 0 \Rightarrow 0 = u'(f'(x')) = f(u(x')) \Rightarrow u(x') \in \operatorname{Kern} f$$

- $\bar{u}'\left(y' + \operatorname{Bild} f'\right) := u'(y') + \operatorname{Bild} f$ und $\bar{v}'\left(y + \operatorname{Bild} f\right) := v'(y) + \operatorname{Bild} f''$ sind wohldefiniert:

$$\begin{aligned}
&y' + \operatorname{Bild} f' = \operatorname{Bild} f' \Rightarrow y' \in \operatorname{Bild} f' \Rightarrow \exists x' \in M' : f'(x') = y' \\
&\Rightarrow u'(y') = u'(f'(x')) = f(u(x')) \in \operatorname{Bild} f \\
&\Rightarrow \bar{u}'\left(y' + \operatorname{Bild} f'\right) = u'(y') + \operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f = \bar{u}'\left(\operatorname{Bild} f'\right)
\end{aligned}$$

- $d : \operatorname{Kern} f'' \to \operatorname{Cokern} f'$ ist wohldefiniert:
  Bei der Wahl von y' in der Definition besteht keine Wahlfreiheit, da u' injektiv ist.
  z.z.: $v(x_1) = v(x_2) = x'', u'(y_1') = f(x_1), u'(y_2') = f(x_2) \Longrightarrow y_1' + \operatorname{Bild} f' = y_2' + \operatorname{Bild} f'$

  Seien also $x_1, x_2 \in M, v(x_1) = v(x_2) = x'', u'(y_1') = f(x_1), u'(y_2') = f(x_2)$
  $\Rightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Kern} v = \operatorname{Bild} u \Rightarrow \exists x' \in M' : u(x') = x_1 - x_2$
  $\Rightarrow u'(y_1' - y_2') = u'(y_1') - u'(y_2') = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = f(u'(x')) = u'(f'(x'))$
  $\overset{u'\text{inj.}}{\Longrightarrow} y_1' - y_2' = f'(x') \in \operatorname{Bild} f' \Rightarrow y_1' + \operatorname{Bild} f' = y_2' + \operatorname{Bild} f'$

- d ist ein Homomorphismus:
  Seien $x_1'', x_2'' \in \operatorname{Kern} f''$ beliebig vorgegeben. Wähle nun x_1 und x_2 wie in der Definition von d vorgeschrieben mit $v(x_1) = x_1''$ und $v(x_2) = x_2''$. Es ist dann nach Definition $d(x_1'') + d(x_2'') = (u')^{-1}(f(x_1)) + \operatorname{Bild} f' + (u')^{-1}(f(x_2)) + \operatorname{Bild} f' = (u')^{-1}(f(x_1 + x_2)) + \operatorname{Bild} f'$. Wegen $v(x_1 + x_2) = v(x_1) + v(x_2) = x_1'' + x_2''$ ist nun aber (wegen Wohldefiniertheit) $d(x_1'' + x_2'') = (u')^{-1}(f(x_1 + x_2)) + \operatorname{Bild} f'$, also $d(x_1'' + x_2'') = d(x_1'') + d(x_2'')$.

- Die Sequenz ist exakt in $\operatorname{Kern} f'$:
  Dies ist klar, denn $\bar{u}$ ist injektiv als Einschränkung der injektiven Abbildung u.

- Die Sequenz ist exakt in $\operatorname{Kern} f$:

  - $\operatorname{Bild} \bar{u} \subset \operatorname{Kern} \bar{v}$ ist klar wegen $\bar{v}(\bar{u}(x')) = v(u(x')) = 0\ \forall x \in \operatorname{Kern} f' \subset M'$

  - $\operatorname{Kern} \bar{v} \subset \operatorname{Bild} \bar{u}$:
    Sei $x \in \operatorname{Kern} \bar{v}$, d.h. $x \in \operatorname{Kern} v \cap \operatorname{Kern} f$. Also gibt es ein $x' \in M'$ mit $u(x') = x$, also auch $u'(f'(x')) = f(u(x')) = f(x) = 0$. Da u' injektiv ist, muß $f'(x') = 0$ sein, also $x' \in \operatorname{Kern} f', \bar{u}(x') = u(x') = x$, d.h. $x \in \operatorname{Bild} \bar{u}$.

- Die Sequenz ist exakt in $\operatorname{Kern} f''$:

  - $\operatorname{Bild} \bar{v} \subset \operatorname{Kern} d$:
    Sei $x \in \operatorname{Kern} f$, d.h. $\bar{v}(x)$ ein beliebiges Element von $\operatorname{Bild} \bar{v}$.
    Zu zeigen ist $d(\bar{v}(x)) = \operatorname{Bild} f'$, d.h. $\exists \tilde{x} \in M : v(\tilde{x}) = \bar{v}(x), u'(0) = f(\tilde{x})$.
    $x := \tilde{x}$ besitzt die gewünschte Eigenschaft, somit ist $\bar{v}(x) \in \operatorname{Kern} d$.

  - $\operatorname{Kern} d \subset \operatorname{Bild} \bar{v}$:
    Sei $x'' \in \operatorname{Kern} d$, d.h. $\exists y' \in \operatorname{Bild} f', x \in M : v(x) = x'', f(x) = u'(y')$. Also gibt es $x' \in M'$ mit $f'(x') = y'$. Somit ist $f(x) = u'(y') = u'(f'(x')) = f(u(x'))$. Daher folgt $x - u(x') \in \operatorname{Kern} f$ und damit $\bar{v}(x - u(x')) = v(x - u(x')) = v(x) = x'' \in \operatorname{Bild} \bar{v}$.

- Die Sequenz ist exakt in $\operatorname{Cokern} f'$:

  - $\operatorname{Bild} d \subset \operatorname{Kern} \bar{u}'$: Sei $y' + \operatorname{Bild} f' \in \operatorname{Bild} d$.
    Das bedeutet: $\exists x'' \in \operatorname{Kern} f''\ \exists \tilde{y}' \in y' + \operatorname{Bild} f', x \in M : v(x) = x'', f(x) = u'(\tilde{y}')$.
    Daher ist $\bar{u}'\left(y' + \operatorname{Bild} f'\right) = \bar{u}'\left(\tilde{y}' + \operatorname{Bild} f'\right) = u'(\tilde{y}') + \operatorname{Bild} f = f(x) + \operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f$.
    Dies heißt aber gerade $y' + \operatorname{Bild} f' \in \operatorname{Kern} \bar{u}'$.

- Kern $\bar{u}' \subset$ Bild d:
  Sei $y' + \text{Bild}\, f' \in \text{Kern}\, \bar{u}'$. Dann ist also $\bar{u}'(y' + \text{Bild}\, f') = u'(y') + \text{Bild}\, f = \text{Bild}\, f$, also $u'(y') \in \text{Bild}\, f$. Daher gibt es $x \in M$ mit $f(x) = u'(y')$.
  Wähle $x'' := v(x)$. Dann ist $f''(x'') = f''(v(x)) = v'(f(x)) = v'(u'(y')) = 0$, also $x'' \in \text{Kern}\, f''$, und dieses x'' erfüllt die Charakterisierung für $d(x'') = y' + \text{Bild}\, f'$.
  Damit gilt nun also $y' + \text{Bild}\, f' \in \text{Bild}\, d$.

- Die Sequenz ist exakt in Cokern f:
  - Bild $\bar{u}' \subset$ Kern $\bar{v}'$:
    Sei $y + \text{Bild}\, f \in \text{Bild}\, \bar{u}'$, d.h. $\exists y' \in N' : \bar{u}'(y' + \text{Bild}\, f') = u'(y') + \text{Bild}\, f = y + \text{Bild}\, f$.
    Dann ist $\bar{v}'\,(y + \text{Bild}\, f) = \bar{v}'\,(u'(y') + \text{Bild}\, f) = v'(u'(y')) + \text{Bild}\, f'' = \text{Bild}\, f''$.
    Also ist $y + \text{Bild}\, f \in \text{Kern}\, \bar{v}'$.
  - Kern $\bar{v}' \subset$ Bild $\bar{u}'$: Sei $y + \text{Bild}\, f \in \text{Kern}\, \bar{v}'$.
    Dann ist $\bar{v}'\,(y + \text{Bild}\, f) = v'(y) + \text{Bild}\, f'' = \text{Bild}\, f''$, d.h. $v'(y) \in \text{Bild}\, f''$.
    Wähle ein $x'' \in M''$ mit $f''(x'') = v'(y)$. Wegen der Surjektivität von v gibt es ein $x \in M$ mit $v(x) = x''$. Dann ist $v'(f(x)) = f''(v(x)) = f''(x'') = v'(y)$ und damit $y - f(x) \in \text{Kern}\, v' = \text{Bild}\, u'$. Also gibt es ein $y' \in N'$, so daß $u'(y') = y - f(x)$. Und dann ist $\bar{u}'\,(y' + \text{Bild}\, f') = u'(y') + \text{Bild}\, f = y - f(x) + \text{Bild}\, f = y + \text{Bild}\, f$, damit also $y + \text{Bild}\, f \in \text{Bild}\, \bar{u}'$.

- Die Sequenz ist exakt in Cokern f'':
  Dies ist klar, denn sei $y'' + \text{Bild}\, f'' \in \text{Cokern}\, f''$. Dann ist $y'' \in N''$ und es gibt $y \in N$ mit $v'(y) = y''$. Also folgt $\bar{v}'(y + \text{Bild}\, f) = v'(y) + \text{Bild}\, f'' = y'' + \text{Bild}\, f''$ und damit $y'' + \text{Bild}\, f'' \in \text{Bild}\, \bar{v}'$.