Tensorprodukte

Isabel Semm

21. Dezember 2004

1 Existenz und Eindeutigkeit

Definition:
Seien M, N, P A-Moduln. f: M x N $\rightarrow$ P heisst A-bilinear, falls $\forall x \in$ M: N $\rightarrow$ P, y $\rightarrow$ f(x, y) und $\forall y \in$ N: M $\rightarrow$ P, x $\rightarrow$ f(x, y) Homomorphismen sind.

Proposition 2.12: (Existenz und Eindeutigkeit des Tensorprodukts)
Seien M, N A-Moduln. Dann existiert (T, g) mit T A-Modul und g: M x N $\rightarrow$ T A bilinear, so dass: Fuer alle A-Moduln P und alle A-bilinearen f: M x N $\rightarrow$ P existiert genau ein A-Modul-Homomorphismus f': T $\rightarrow$P mit f'$\circ$g=f. Erfuellen (T, g) und (T', g') diese Eigenschaft, dann existiert genau ein Isomorphismus j: T $\rightarrow$ T' mit j $\circ$g=g'.

Definition:
T aus Proposition 2.12 heisst Tensorprodukt von M und N. Schreibweise: M $\bigotimes$ N bzw. M $\bigotimes_A$N.

Beweis:
Eindeutigkeit:
Seien (T, g) und (T', g') Paare mit der oben genannten Eigenschaft. Dann existiert genau ein j: T $\rightarrow$ T' mit j$\circ$g=g', genau ein j': T' $\rightarrow$ T mit j'$\circ$g'=g, genau ein v: T $\rightarrow$ T mit v$\circ$g=g (1) und genau ein w: T' $\rightarrow$ T' mit w$\circ$g'=g' (2). Da id und j'$\circ$j (1) erfuellt sowie id und j$\circ$j' (2) erfuellt, gilt: id=j$\circ$j' und id=j'$\circ$j. Und j ist ein Isomorphismus.

Existenz:
Sei C:=A^{MxN}= { $\sum_{i=1}^{n}$ a_i (x_i,y_i) | n nat. Zahl , $a_i \in$ A, $x_i \in$ M, $y_i \in$ N}. Sei D:= $\langle$ { (x+x',y)-(x,y)-(x',y) $\in$ C, (x,y+y')-(x,y)-(x,y') $\in$ C, (ax,y)-a(x,y) $\in$ C, (x,ay)-a(x,y) $\in$ C}$\rangle$. Sei T:=C/D. C und C/D sind A-Moduln.

Betrachte MxN $\rightarrow$ C $\rightarrow$ T. Es exisitiert die Inklusion von MxN nach C und der kanonische Epimorphismus von C nach T. Das Bild von (x,y) unter diesen beiden hintereinander ausgefuehrten Abbildungen werde mit x$\bigotimes$y bezeichnet. Die Hintereinanderausfuehrung dieser Abbildungen werde mit g bezeichnet. (Also: g((x,y))=x$\bigotimes$y)
Dann wird T erzeugt durch Elemente der Form x$\bigotimes$y und, da die Elemente von D auf die Null abgebildet werden, gilt: (x+x')$\bigotimes$y=x$\bigotimes$y + x'$\bigotimes$y, x$\bigotimes$(y+y')=x$\bigotimes$y + x$\bigotimes$y', ax$\bigotimes$y=a(x$\bigotimes$y)=x$\bigotimes$ay.

Jetzt muss die geforderte Eigenschaft gezeigt werden. Sei f eine A-bilineare Abbildung mit f: MxN $\rightarrow$ P, (x,y)$\rightarrow$f(x,y), dann exisitiert $\tilde{f}$: C $\rightarrow$ P, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ (x_i,y_i)$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i$ f((x_i,y_i)). Wegen der A-Bilinearitaet ist $\tilde{f}$(d)=0 fuer alle Erzeuger d von D, und wegen der Relationstreue auch fuer alle d $\in$ D.

Jetzt muss gezeigt werden: Es existiert genau ein f': T $\to$P mit f'$\circ\Pi$ = $\tilde{f}$, wobei Π der kanonische Epimorphismus von C nach T ist. Sei f': C/D $\to$ P, $\sum_{i=1}^{n}$ a_i (x_i,y_i)+ D $\to$ $\sum_{i=1}^{n}$ a_i f((x_i,y_i)). f' ist wohldefiniert, A-Homomorphismus, erfuellt die Kommutativitaet und ist eindeutig.

Beispiele:
(i) Seien V, W Vektorraeume ueber einem Skalarkoerper K, V* der Vektorraum aller linearen Abbildungen V $\to$ K. Dann kann der Vektorraum der linearen Abbildungen V $\to$ W mit V*$\bigotimes$ W identifiziert werden. $\alpha\otimes$w entspricht dem Homomorphismus v $\to$ α(v)w.
(ii) Der Vektorraum der Bilinearformen VxW $\to$ K kann mit V*$\bigotimes$ W* identifiziert werden, wobei W* der Vektorraum aller linearen Abbildungen W $\to$ K ist, K der gemeinsame Skalarkoerper von V und W. $\alpha \otimes \beta$ entspricht der Bilinearform (v,w) $\to$ α(v)β(w).

Bemerkung:
(i) Falls M=$\langle$ $\{x_i$ $\}_{i\in I}\rangle$, N=$\langle$ $\{y_j$ $\}_{j\in J}\rangle$, dann ist M $\bigotimes$ N = $\langle$ $\{x_i \bigotimes y_j|$ i $\in I, j \in J$ $\}\rangle$. Insbesondere gilt: Sind M,N endlich erzeugt, dann ist auch M $\bigotimes$ N endlich erzeugt.
(ii) Der Ausdruck x$\bigotimes$y ist nicht eindeutig. Das zugehoerige Tensorprodukt muss angegeben werden.
Beispiel:
In $Z \bigotimes Z/2Z$ ist 2$\bigotimes$x mit x $\neq 0_{Z/2Z}$ gleich Null, denn 2$\bigotimes x$ = 1$\bigotimes$2x = 1$\bigotimes$0 = 0.
In $2Z \bigotimes Z/2Z$ ist 2 $\bigotimes$ x mit x $\neq 0_{Z/2Z}$ ungleich Null, denn 2Z $\bigotimes$ Z/2Z $\cong$ Z $\bigotimes$ Z/2Z $\cong$ Z/2Z (wird spaeter bewiesen) und es existieren Isomorphismen mit 2x$\bigotimes$(y+2**Z**) $\to x \bigotimes (y + 2\mathbf{Z}) \to xy + 2\mathbf{Z}$ und $2 \bigotimes (y + 2\mathbf{Z}) \to 1$ $\bigotimes(y{+}2\mathbf{Z}) \to y{+}2\mathbf{Z}$. Wenn nun y+2Z ungleich Null ist, ist auch 2x$\bigotimes$(y+2Z) ungleich Null.

Korollar 2.18:
Seien $x_i\in$ M, $y_i\in$ N, so dass $\sum$ $x_i \bigotimes y_i$= 0 in M$\bigotimes$N. Dann existieren endlich erzeugte Untermoduln M_0 $\subseteq$M und N_0 $\subseteq$N, so dass gilt: $\sum$ $x_i \bigotimes y_i$= 0 in $M_0 \bigotimes N_0$

Beweis:
Betrachte i: M x N $\to$ C und Π: C $\to$ T, T = C/D, mit $\sum$ (x_i,y_i) $\to$ $\sum$ x_i $\bigotimes$ y_i, wobei i die Inklusion und Π der kanonische Epimorphismus ist. Da x_i $\bigotimes$ y_i= 0, folgt $\sum$ (x_i,y_i) $\in$ D. Also ist $\sum$ (x_i,y_i) endliche Summe von Erzeugern von D.

Definiere nun M_0 :=$\langle\{$ x_i $\}$ $\cup$ $\{$ z_i $\}\rangle$, wobei z_i die ersten Komponenten eben dieser Erzeuger von D sind. Und definiere N_0 :=$\langle\{$ y_i $\}\cup\{$ t_i $\}\rangle$, wobei t_i die zweiten Komponenten dieser Erzeuger von D sind.

Betrachte nun i´: M_0 x N_0 → C' und Π : C' → T', wobei i' die Inklusion, Π der kanonische Epimorphismus und T'= C'/D' = $M_0 \bigotimes N_0$ ist,
C':= { $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (x_i,y_i) | n nat. Zahl , $a_i \in$ A, $x_i \in M_0$, $y_i \in N_0$ } und D':= ⟨ { (x+x',y)-(x,y)-(x',y) ∈ C', (x,y+y')-(x,y)-(x,y') ∈ C', (ax,y)-a(x,y) ∈ C', (x,ay)-a(x,y) ∈ C'}⟩. ⇒ $\sum$ (x_i,y_i) endliche Summe von Erzeugern von D ⇒ $\sum$ (x_i,y_i) ∈D'⇒ $\sum x_i \bigotimes y_i = 0$ in $M_0 \bigotimes N_0$.

Bemerkung:
Analog zum Tensorprodukt zweier Moduln wird ein Multi-Tensorprodukt definiert. T = $M_1 \bigotimes .. \bigotimes M_r$, erzeugt von den $x_1 \otimes .. \otimes x_r$, $x_1 \in M_i$, 1 ≤ i ≤ r. Das Multi-Tensorprodukt existiert und ist eindeutig.

Proposition 2.14:
Seien M, N, P A-Moduln. Dann existieren eindeutige Isomorphismen
(i) M ⨂ N → N ⨂ M, x ⊗ y → y ⊗ x
(ii) (M ⨂ N) ⨂ P → M ⨂ (N ⨂ P) → M ⨂ N ⨂ P,
(x ⊗ y) ⊗ z → x ⨂ (y ⨂ z) → x ⨂ y ⨂ z
(iii) (M ⨁ N) ⨂ P → (M ⨂ P) ⨁ (N ⨂ P),
(x ⊕ y) ⊗ z → (x ⊗ z) ⊕ (y ⊗ z)
(iv) A ⨂ M → M,
a ⊗ x → ax.

Beweis: (fuer einen Teil von (ii) und (iv) und fuer (iii))
(ii) Fuer den Beweis wird die Eigenschaft des Tensorprodukts mehrere Male ausgenutzt. Betrachte die A-bilineare Funktion M x N → M ⨂ N ⨂ P, (x,y) → x ⊗ y ⊗ z. Dann existiert - wegen der Eigenschaft des Tensorprodukts - genau ein Homomorphismus f_z: x ⊗ y → x ⊗ y ⊗ z. Betrachte ausserdem (M ⨂ N) x P → (M ⨂ N) ⨂ P, (t,z) → f_z(t) (A-bilinear) und M x N x P → M ⨂ N ⨂ P, (x,y,z) → (x ⊗ y) ⊗ z (linear in jeder Variablen).
Da f ∘ g und g ∘ f gleich den Identitaeten sind, folgt, dass g und f Isomorphismen sind.

(iii) Es wird diese allgemeinere Aussage bewiesen: Es sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln, B R-Modul.
Zur Erinnerung: $\bigoplus_{i\in I} A_i$ = { $(a_i)_{i\in I}$ | ∀ i ∈ I : $a_i \in A_i$, $a_i = 0$ fuer fast alle i ∈ I }. Dann exisitiert genau ein R-Modul-Isomorphismus
($\bigoplus_{i\in I} A_i$) ⨂ B → $\bigoplus_{i\in I}$ (A_i ⨂ B), ($(a_i)_{i\in I}$) ⊗ b → $(a_i \otimes b)_{i\in I}$.
Bew: Die Abbildung ($\bigoplus_{i\in I} A_i$) x B → $\bigoplus_{i\in I}$ (A_i ⨂ B), ((a_i $)_{i\in I}$, b) → ($a_i \otimes$ b $)_{i\in I}$ ist R-bilinear. ⇒ ∃! R-Modulhomomorphismus τ : ($\bigoplus_{i\in I} A_i$) ⨂ B → $\bigoplus_{i\in I}$ (A_i ⨂ B), τ: ((a_i $)_{i\in I}$ ⊗ b) = ($a_i \otimes$ b $)_{i\in I}$.
Fuer festes j ∈ I ist die Abbildung A_j x B → ($\bigoplus_{i\in I} A_i$) ⨂ B, (a,b) → (δ_{ij} a $)_{i\in I}$ ⊗ b R-bilinear. ⇒ ∃ ! R-Modul-Homomorphismus σ_j : A_j ⨂ B → ($\bigoplus_{i\in I} A_i$) ⨂ B, a ⊗ b → (δ_{ij} a $)_{i\in I}$ ⊗ b.
Definiere σ : $\bigoplus_{i\in I}$ (A_i ⨂ B) → ($\bigoplus_{i\in I} A_i$) ⨂ B, $(c_i)_{i\in I}$ → $\sum_{j\in I} \sigma_j$

(c_j) (endliche Summe). σ ist R-Modulhomomorphismus als Summe der R-Modulhomomorphismen σ_j.

Es ist nachzurechnen, dass σ und τ zueinander invers sind. Da alle Elemente von $(\bigoplus_{i\in I} A_i) \bigotimes$ B bzw. $\bigoplus_{i\in I} (A_i \bigotimes$ B) Summen von reinen Tensoren sind, genuegt es, zu zeigen: (σ (τ $((a_i)_{i\in I} \otimes$ b)) = $(a_i)_{i\in I} \otimes$ b $\forall$ $a_i \in A_i$, b $\in$ B und τ (σ $((a_i\otimes b_i)_{i\in I})) = (a_i\otimes b_i)_{i\in I}$ $\forall$ $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$.

(iv) Es wird bewiesen: Seien M, N A-Moduln. Dann gilt A $\bigotimes$ M $\cong$ M.
h: A x M $\to$ M, (a,m) $\to$ am ist A-bilinear. $\Rightarrow \exists$! A-Modulhomomorphismus φ : A $\bigotimes$ M $\to$ M, a $\otimes$ m $\to$ am.
Definiere ψ : M $\to$ A $\bigotimes$ M, m $\to$ 1 $\otimes$ m. ψ ist ein A-Modulhomomorphismus.

$(\varphi\psi)$(m) = φ(1$\otimes$m) = 1m = m $\forall$ m $\in$ M. $(\psi\varphi)$(a$\otimes$m) = ψ(am) = 1$\otimes$am = 1a$\otimes$ m = a$\otimes$m $\forall$ a$\otimes$m $\in$ A $\bigotimes$ M (und wegen der Relationstreue auch fuer alle Elemente aus A $\bigotimes$ M. $\Rightarrow$ $\psi\varphi$, $\varphi\psi$ = id $\Rightarrow$ φ ist Isomorphismus $\Rightarrow$ A $\bigotimes$ M $\cong$ M.

Bemerkung:
Seien f: M$\to$M', g: N$\to$N' A-Modulhomomorphismen. Dann existiert ein A-Modulhomomorphismus f$\otimes$g: M$\bigotimes$N $\to$ M'$\bigotimes$N', x$\bigotimes$y $\to$ f(x)$\bigotimes$g(y). Und:(f'$\circ$f)$\otimes$(g'$\circ$g) = (f'$\otimes$g') $\circ$ (f $\otimes$ g).

Beweis:
Definiere h: M x N $\to$ M' $\bigotimes$ N', (x, y) $\to$ f(x) $\bigotimes$ g(y). h ist A-bilinear. $\Rightarrow \exists$! A-Modulhomomorphismus f $\otimes$ g: x $\otimes$ y $\to$ f(x) $\otimes$ g(y). Sei x $\otimes$ y einer der Erzeuger von M $\bigotimes$ N. Dann gilt:

((f'$\otimes$ g')$\circ$ (f$\otimes$ g))(x$\otimes$y) = (f'$\otimes$g')(f(x)$\otimes$g(y)) = f'(f(x)$\otimes$g'(g(y)) = (f'$\circ$f)(x)$\otimes$(g'$\circ$g)(y) = ((f'$\circ$f)$\otimes$(g'$\circ$g))(x$\otimes$y). Also (f'$\circ$f)$\otimes$(g'$\circ$g) = (f'$\otimes$g') $\circ$ (f $\otimes$ g) auf M $\bigotimes$ N.

2 Restriktion und Extension von Skalaren

Bemerkung: (i) Sei f: A→B ein Ringhomomorphismus, N ein B-Modul. Dann ist N ein A-Modul.
Bew.: Die Operation φ: A x N → N, (a, x) → ax:=f(a)x erfuellt die geforderten Eigenschaften.
(ii) Man sagt, der A-Modul N wird erhalten durch **Restriktion der Skalare**.
(iii) Insbesondere ist B ein A-Modul.

Proposition 2.16:
Sei f: A→B ein Ringhomomorphismus. Sei N endlich erzeugt als B-Modul, B endlich erzeugt als A-Modul. Dann ist N endlich erzeugt als A-Modul.

Beweis:
Erzeuge $\{y_1,..y_n\}$ N ueber B und erzeuge $\{x_1,..x_m\}$ B ueber A, dann erzeugt $\{x_i y_j|$ i=1,..m, j=1,..n$\}$ N als A-Modul.

Bemerkung: (i) Sei F: A → B ein Ringhomomorphismus, M ein A-Modul. Dann ist B $\bigotimes_A$ M =: M_B ein B-Modul.

Bew.: Definiere φ_b: B x M → B $\bigotimes_A$ M, (b', m) → bb'$\otimes_A$ m. φ_b ist A-bilinear. ⇒ ∃ ! A-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi}_b$: B $\bigotimes_A$ M → B $\bigotimes_A$ M, b' $\otimes_A$ m → bb'$\otimes_A$ m.

Definiere u: B x (B $\bigotimes_A$ M) → B $\bigotimes_A$ M, (b, b'$\otimes_A$ m) → b(b'$\otimes_A$ m) := $\tilde{\varphi}_b$ (b'$\otimes_A$ m) = bb'$\otimes_A$ m.
1_B(b'$\otimes_A$m) = 1_B b'$\otimes_A$ m = b'$\otimes_A$ m.
Seien b, b_1, b_2 ∈ B, dann gilt: $(b_1 b_2)$(b'$\otimes_A$m) = $(b_1 b_2)$b' $\otimes_A$ m = $b_1(b_2$b'$)\otimes_A$ m = $b_1(b_2$b'$\otimes_A$ m)
(b_1+b_2)(b'$\otimes_A$m) = (b_1+b_2)b'$\otimes_A$ m = $(b_1$b' + b_2b'$)\otimes_A$ m = b_1b'$\otimes_A$ m + b_2b'$\otimes_A$ m = b_1(b'$\otimes_A$ m) + b_2(b'$\otimes_A$ m)
b(b_1'$\otimes_A m_1$ + b_2'$\otimes_A m_2$) = $\tilde{\varphi}_b$ (b_1'$\otimes_A m_1$ + b_2'$\otimes_A m_2$) = $\tilde{\varphi}_b$ (b_1'$\otimes_A m_1$) + $\tilde{\varphi}_b$ (b_2'$\otimes_A m_2$) = b (b_1'$\otimes_A m_1$) + b (b_2'$\otimes_A m_2$)

Wegen der Relationstreue gelten die Eigenschaften ∀ x ∈ B$\bigotimes_A$ M.
(ii) Man sagt der B-Modul M_B wird erhalten durch **Extension der Skalare**.

Proposition 2.17:
Wenn M endlich erzeugt ist als A-Modul, dann ist M_B endlich erzeugt als B-Modul.

Beweis:

Sei I = $\{x_1, .. \, x_m\}$ und M = $\{\sum_{x\in I} a_x$x $\mid a_x \in$ A$\}$, dann ist $\{1 \otimes_A x_1, .., 1 \otimes_A x_m\}$ Erzeugendensystem von M_B über B, das heisst $M_B = \{\sum_{y \in J} b_y$y $\mid b_y \in$ B$\}$, wobei J = $\{1 \otimes_A x_1, .., 1 \otimes_A x_m\}$.

3 Exaktheitseigenschaften des Tensorprodukts

Proposition 2.18:
Sei M'$\to^f$M$\to^g$M"$\to$ exakt und N ein A-Modul. Dann ist M'$\bigotimes$N$\to^{f\otimes 1}$ M $\bigotimes$ N $\to^{g\otimes 1}$ M"$\bigotimes$ N $\to$ 0 exakt.

Beweis:
m_1"$\otimes$ n_1 + .. + m_r"$\otimes$ n_r $=_{gsurjektiv}$
g(m_1) $\otimes$ n_1 + ..g(m_r) $\otimes$ n_r =
(g $\otimes$ 1_N)($m_1$$\otimes$ n_1 + .. + $m_r$$\otimes$ n_r)
$\Rightarrow$ g $\otimes$ 1_N ist ein Epimorphismus
$\Rightarrow$ Exaktheit in M"$\bigotimes$ N.

noch zu zeigen: Exaktheit in M $\bigotimes$ N $\Leftrightarrow$ Ker(g$\otimes$1) = Im(f$\otimes$1)
$\supseteq$: (g $\otimes$ 1)(f $\otimes$ 1) = gf $\otimes$ 1 = 0 $\otimes$ 1 = 0.
$\subseteq$: Definiere μ: (M$\bigotimes$N)/Im(f$\otimes$1) $\to$ M"$\bigotimes$N, x+Im(f$\otimes$1) $\to$ (g$\otimes$1)(x) und zeige, dass μ ein Monomorphismus ist.

Wohldefiniertheit: Sei x + Im(f$\otimes$1)=y+Im(f$\otimes$1)
$\Rightarrow$ x-y $\in$ Im(f$\otimes$1)
$\Rightarrow$ x-y $=_{x-y\in M\bigotimes N}$ $\sum$ $m_i \otimes n_i$ $=_{x-y\in Im(f\otimes 1)}$ $\sum$ f(m_i')$\otimes$ $1_N(n_i)$ fuer $m_i \in$ M, $n_i \in$ N und m_i' $\in$ M'
$\Rightarrow$ (g$\otimes$1)(x)-(g$\otimes$1)(y) = (g$\otimes$1)(x-y) = (g$\otimes$1)($\sum$ f(m_i')$\otimes$ $1_N(n_i)$) = $\sum$ gf(m_i' $\otimes$ $1_N(n_i)$ $=_{Exaktheit}$ 0
$\Rightarrow$ (g$\otimes$1)(x)= (g$\otimes$1)(y)

Relationstreue: μ(x+Im(f$\otimes$1)+y+Im(f$\otimes$1))=
μ ((x+y)+Im(f$\otimes$1))= (g$\otimes$1)(x+y) $=_{g\otimes 1 Modulhom.}$ (g$\otimes$1)(x)+(g$\otimes$1)(y) = μ(x+Im(f$\otimes$1))+μ (y+Im(f$\otimes$1))
μ(a(x+Im(f$\otimes$1)) = (g$\otimes$1)(ax) $=_{g\otimes 1 A-Modulhom.}$ = a(g$\otimes$1)(x) = aμ(x+Im(f$\otimes$1))
Jetzt ist noch zu zeigen, dass μ Monomorphismus ist, denn dann gilt folgendes: Sei x $\in$ Ker(g$\otimes$1) $\Rightarrow_{\mu Monom.}$ x+Im(f$\otimes$1) = 0+Im(f$\otimes$1) $\Rightarrow$ x $\in$ Im(f$\otimes$1).

Also zu zeigen: μ ist ein Monomorphismus.
Wir zeigen, dass es ein φ gibt mit:
M $\bigotimes$ N/Im(f $\otimes$ 1) $\to_\mu$ M"$\bigotimes$ N $\to_\varphi$ M $\bigotimes$ N/Im(f$\otimes$ 1), x + Im(f$\otimes$1)$\to$ .. $\to$ x + Im(f$\otimes$ 1). Dann folgt, dass μ bijektiv ist, und insbesondere injektiv.
Wir definieren eine A-bilineare Funktion h: M"$\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N/Im(f$\otimes$ 1), (m",n) $\to$ m $\otimes$ n + Im(f $\otimes$ 1), falls g(m)=m". Wegen der Eigenschaft der Tensorprodukts existiert genau ein φ: M" $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N/Im(f $\otimes$ 1), so dass φ(m"$\otimes$n)=m$\otimes$ n + Im(f $\otimes$ 1), falls g(m)=m".

h Funktion: Sei m"=g(m_1)=g(m_2) $\Rightarrow$ m_1 $\otimes$ n - $m_2$$\otimes$ n = (m_1-m_2) $\otimes$ n $=_{Ker(g)=Im(f)}$f(m') $\otimes$ 1_N(n) = (f $\otimes$ 1_N)(m' $\otimes$ n) $\in$ Im(f $\otimes$ 1) h A-bilinear: Gelte g(m_1)=m_1" und g(m_2)=m_2". Dann gilt h(m_1"+m_2", n) = (m_1+m_2) $\otimes$ n + Im(f $\otimes$ 1) = $m_1 \otimes$ n + $m_2 \otimes$ n + Im(f $\otimes$ 1) = h(m_1",n) + h(m_2",n).

h(m",n_1+n_2) = .. genauso
h(m"a,n) = ma $\otimes$ n + Im(f $\otimes$ 1) = m $\otimes$ an + Im(f $\otimes$ 1) = h(m", an).
$(\varphi\mu)((m_1 \otimes n_1 + .. + (m_r \otimes n_r) + \mathrm{Im}(f \otimes 1)) =_{g\otimes 1 relationstreu}$
φ ((g $\otimes$ 1)($m_1 \otimes n_1$) + .. + (g $\otimes$ 1)($m_r \otimes n_r$))=
φ (g(m_1) $\otimes$ $1_N(n_1)$ + .. + g(m_r) $\otimes$ $1_N(n_r)$) $=_{\varphi relationstreu}$
$m_1 \otimes n_1$ + Im(f $\otimes$ 1) + .. + $m_r \otimes n_r$ + Im(f $\otimes$ 1) =
$m_1 \otimes n_1$ + .. + $m_r \otimes n_r$ + Im(f $\otimes$ 1)

$\Rightarrow \varphi\mu$ = id $\Rightarrow \mu$ injektiv $\Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung:
Sei M' $\to$ M $\to$ M" eine exakte Folge von A-Moduln. Daraus folgt nicht: M' $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N $\to$ M" $\bigotimes$ N ist exakt $\forall$ A-Moduln N.

Gegenbeispiel:
$0 \to \mathbf{Z} \to_f \mathbf{Z}$ mit f(x)=2x $\forall$ x $\in$ **Z** ist eine exakte Folge von **Z**-Moduln. Aber:
$0 \to_g \mathbf{Z} \bigotimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to_{f\otimes g} \mathbf{Z} \bigotimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ist **nicht** exakt,
denn Im(g)=0 und Ker(f $\otimes$ 1) = **Z**/2**Z**, da (f $\otimes$ 1)(x $\otimes$ y) = 2x $\otimes$ y = x $\otimes$ 2y = 0.

Definition:
Ein A-Modul N heißt **flach**, falls für alle exakten Folgen von A-Moduln .. $\to$ M' $\to$ M $\to$ M" $\to$ .. gilt:
.. $\to$ M' $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N $\to$ M" $\bigotimes$ N $\to$ .. ist auch exakt.

Proposition 2.19:
Sei N ein A-Modul. dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) N ist flach
(ii) Wenn 0 $\to$ M' $\to$ M $\to$ M" $\to$ 0 exakt ist, dann ist auch
0 $\to$ M' $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N $\to$ M" $\bigotimes$ N $\to$ 0 exakt.
(iii) Wenn f: M' $\to$ M injektiv ist, dann ist auch f $\otimes$ 1: M' $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N injektiv.
(iv) Wenn f: M' $\to$ M injektiv ist und M und M' endlich erzeugt sind, dann ist auch f $\otimes$ 1: M' $\bigotimes$ N $\to$ M $\bigotimes$ N injektiv.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ **(ii):** klar!

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei .. $\to$ M' $\to_f$ M $\to_g$ M" $\to$ .. exakt. Seien i': Ker(f) $\to$ M', i: Ker(g) $\to$ M und i": Im(g) $\to$ M" die entsprechenden Inklusionen sowie f': M' $\to$ Im(f) und g': M $\to$ Im(g) die von f und g induzierten Abbildungen. π : M" $\to$ M"/Im(g) sei der kanonische Epimorphismus.
Man weiß:
0 $\to$ Ker(g) $\to_i$ M $\to_{g'}$ Im(g) $\to$ 0 ist eine kurze exakte Sequenz, da Ker(g')=Ker(g)=Im(i)
$\Rightarrow_{(ii)}$ 0 $\to$ Ker(g) $\bigotimes$ N $\to_{i\otimes 1}$ M $\bigotimes$ N $\to_{g'\otimes 1}$ Im(g) $\bigotimes$ N $\to$ 0 ist kurze exakte Sequenz
$\Rightarrow$ Exaktheit in M $\bigotimes$ N, denn Ker(g $\otimes$ 1) = Ker(g' $\otimes$ 1) = Im(i $\otimes$ 1) = Im(f $\otimes$ 1).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei f injektiv. Dann ist 0 $\to$ M' $\to_f$ M $\to_\pi$ M/Im(f) $\to$ 0 exakt.
$\Rightarrow_{(ii)}$ 0 $\to$ M' $\bigotimes$ N $\to_{f\otimes 1}$ M $\bigotimes$ N $\to_{\pi\otimes 1}$ M/Im(f)$\bigotimes$ N $\to$ 0 ist exakt
$\Rightarrow$ f $\otimes$ 1 ist injektiv

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei 0 $\to$ M' $\to_f$ M $\to_g$ M" $\to$ 0 exakt. Wegen Proposition 2.18 und da f $\otimes$ 1 nach (iii) injektiv ist, ist 0 $\to$ M' $\bigotimes$ N $\to_{f\otimes 1}$ M $\bigotimes$ N $\to_{g\otimes 1}$ M" $\bigotimes$ N $\to$ 0 eine kurze exakte Sequenz.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): klar!
(iv) $\Rightarrow$ (iii): Sei f injektiv. Sei u $\in$ Ker(f $\otimes$1), u = $\sum$ x_i' $\otimes$ y_i, d. h. (f $\otimes$ 1)(u) = $\sum$ f(x_i') $\otimes$ y_i =0 in M $\bigotimes$ N. Sei M_0' der Untermodul von M', der von den x_i' erzeugt wird, sei $u_0 = \sum$ x_i' $\otimes$ y_i in M_0' $\bigotimes$ N. Nach Kor. 2.13 existiert ein endlich erzeugter Untermodul $M_0 \subseteq$ M mit $\sum$ f(x_i') $\otimes$ y_i = 0 als Element von M_0 $\bigotimes$ N.
Sei f_0 die Einschränkung von f auf M_0', dann folgt (f_0 $\otimes$ 1)(u_0) = 0.
$\Rightarrow_{endl.erz}$ f_0 $\otimes$ 1 injektiv $\Rightarrow$ u_0 = 0 $\Rightarrow_{Inklusion}$ u = 0.

4 Tensorprodukt von Algebren

Definition:
Sei f: A $\rightarrow$ B ein Ringhomomorphismus. Durch φ: A x B $\rightarrow$ B, (a,b) $\rightarrow$ ab:= f(a)b wird B A-Modul. B heißt **A-Algebra**.

Definition:
Seien f: A $\rightarrow$ B, g: A $\rightarrow$ C Ringhomomorphismen. Ein **A-Algebra-Homomorphismus** h: B $\rightarrow$ C ist ein Ringhomomorphismus, der auch A-Modul-Homomorphismus ist.

Beh.: Seien B, C A-Algebren, f: A $\rightarrow$ B, g: A $\rightarrow$ C die zugehörigen Homomorphismen. Dann ist D= B $\bigotimes_A$ C eine A-Algebra.

Bew: Wir wissen, daß B $\bigotimes_A$ C A-Modul ist. Wir definieren eine Multiplikation. Definiere zunächst $\varphi_{d'}$': B x C $\rightarrow$ B $\bigotimes_A$ C, (b, c) $\rightarrow$ bb' $\otimes_A$ cc'. Da diese Funktion A-bilinear ist, exisitiert genau ein A-Modul-Homomorphismus $\tilde{\varphi}_{d'}$: B $\bigotimes_A$ C $\rightarrow$ B $\bigotimes_A$ C, b $\otimes_A$ c $\rightarrow$ bb' $\otimes_A$ cc'.

Definiere nun die Multiplikation ψ: D x D $\rightarrow$ D, (x, y) $\rightarrow$ φ (x)(y), also ψ(b'$\otimes$ c', b $\otimes$ c) = φ (b' $\otimes$ c')(b $\otimes$ c) = $\tilde{\varphi}_{(b',c')}$(b $\otimes$ c) = b'b $\otimes$ c'c.
Der zu D gehörende Ringhomomorphismus ist φ: A $\rightarrow$ D, a $\rightarrow$ f(a) $\otimes$ 1 = 1 $\otimes$ g(a).