W. Lütkebohmert 14.04.2005
J. Marhenke SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 1

Abgabe am 21.04.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil sowie den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $(1-i)^n,\ n \in \mathbb{Z}$

(b) $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} - \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

(c) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{1+ia}{1-ia},\ a \in \mathbb{R}$

(e) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{7} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}$

(f) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n},\ n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $M_1 = \{\, z;\ |z| < 1 - \operatorname{Re} z \,\}$

(b) $M_2 = \left\{\, z;\ \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 2 \,\right\}$

(c) $M_3 = \left\{\, z;\ \operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \,\right\}$

(d) $M_4 = \left\{\, z;\ \left|\dfrac{a-z}{\bar{a}+z}\right| < 1 \,\right\},\ \operatorname{Re} a > 0$

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Es sei $\underline{e}$ die Basis $(1,i)$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ und $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie: φ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn die darstellende Matrix die Form hat

$$^{\underline{e}}M(\varphi) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Es sei $S^1 = \{\, z \in \mathbb{C};\ |z| = 1 \,\}$. Ferner sei $\xi \in S^1$ und $M = \{\, \xi^n;\ n \in \mathbb{Z} \,\} \subset S^1$. Zeigen Sie, dass M entweder endlich oder dicht in S^1 ist.