Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 2

Abgabe am 28.04.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$.
Man zeige: f ist genau auf den Koordinatenachsen komplex differenzierbar, und es gibt keine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, sodass $f|D$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Man untersuche die folgenden komplexen Funktionen f auf Stetigkeit und komplexe Differenzierbarkeit. Gegebenenfalls bestimme man die Ableitung in den Punkten, in denen f komplex differenzierbar ist.

(a) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$ (b) $f(z) = \bar{z}$

(c) $f(z) = z\bar{z}$ (d) $f(z) = z/\bar{z},\ z \neq 0$

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar und $D^* = \{\overline{z}\,;\, z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : D^* \to \mathbb{C},\quad g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist und $\overline{f'(a)}$ die Ableitung $g'(\overline{a})$ ist.

Aufgabe 8. (6 Punkte)
Man identifiziere via $z = x + iy$ die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $C^\infty(D, \mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft reell differenzierbaren Funktionen auf D und der *Laplaceoperator* $\Delta : C^\infty(D, \mathbb{R}) \to C^\infty(D, \mathbb{R})$ definiert durch

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}u + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}u\,.$$

(a) Es seien $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion mit $u, v \in C^\infty(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktionen u, v *harmonisch* sind, d.h. es gilt

$$\Delta(u) = \Delta(v) = 0.$$

(b) Es seien nun $D =]\,a, b\,[\times]\,c, d\,[$ und $u \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion und $x_0 \in]\,a, b\,[$, $y_0 \in]\,c, d\,[$. Man definiert eine Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}u(t, y_0)\,dt\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: Hier brauchen Sie ein Resultat aus der reellen Analysis über die Vertauschung von Differentiation und Integration.

(c) Finden Sie mit dem Ansatz in (b) eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil die Funktion $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ ist.