W. Lütkebohmert 28.04.2005
J. Marhenke SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 3

Abgabe am 03.05.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Seien $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\alpha(t) = e^{it}$$

und $\beta : [0, 2] \to \mathbb{C}$ durch

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 + t(-i-1) & \text{für } t \in [0,1] \\ 1 - t + i(t-2) & \text{für } t \in [1,2]. \end{cases}$$

Man skizziere das Bild von α sowie das Bild von β und berechne

$$\int_\alpha \frac{1}{z}\, dz \text{ und } \int_\beta \frac{1}{z}\, dz.$$

Aufgabe 10. (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

(a) $\int_\gamma \bar{z}^2\, dz$ mit γ der geraden Wegstrecke $[0, 1+i]$

(b) $\int_\gamma \bar{z}^2\, dz$ mit γ der Verkettung $[0, 1]$ mit $[1, 1+i]$

(c) $\int_\gamma z \cdot e^{z^2}\, dz$ mit $\gamma = S^1$ im Uhrzeigersinn durchlaufen

Aufgabe 11. (5 Punkte)
Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und f : Bild $\alpha \to \mathbb{C}$.
Man zeige: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:
Sind $\{a_0, \ldots, a_N\}$ und $\{c_1, \ldots, c_N\}$ endliche Teilmengen von $[a, b]$ mit

$$a = a_0 \leq c_1 \leq a_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq a_{N-1} \leq c_N \leq a_N = b$$

und

$$a_\nu - a_{\nu-1} < \delta \text{ für } \nu = 1, \ldots, N,$$

dann ist

$$\left| \int_\alpha f(z)\, dz - \sum_{\nu=1}^{N} f(\alpha(c_\nu)) \cdot (\alpha(a_\nu - \alpha(a_{\nu-1})) \right| < \epsilon$$

(Approximation des Kurvenintegrals durch Riemannsche Summen).