W. Lütkebohmert
J. Marhenke

03.05.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 4

Abgabe am 12.05.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 12. (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$ (d) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1)-z}{(z-7)^{42}}\,dz$

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Sei α die Kurve

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1-e^{it} & ;\ t \in [0, 2\pi] \\ -1+e^{-it} & ;\ t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\alpha \frac{1}{1-z^2}\,dz.$$

Aufgabe 14. (5 Punkte)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in G$ und $u, v : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Man zeige, dass die Funktion $f = u+iv : G \to \mathbb{C}$ genau dann in 0 komplex differenzierbar ist, wenn gilt

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{|z|=r} f(z)\,dz = 0.$$

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gibt es eine reelle Zahl M, so dass $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, so ist f konstant.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g = \exp \circ f$ und wenden Sie den Satz von Liouville auf g an.