W. Lütkebohmert 12.05.2005
J. Marhenke SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 5

Abgabe am 19.05.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 16. (4 Punkte)

(a) Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

habe positiven Konvergenzradius und im Konvergenzkreis gelte $f(z) = f(-z)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für alle ungeraden ν gilt $a_\nu = 0$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer ganzen Funktion an, die obiger Bedingung genügt.

Aufgabe 17. (6 Punkte)

(a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Potenzreihen um z_0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradien.

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 6} \text{ um } z_0 = 0$$

$$\frac{1}{(z-i)^3} \text{ um } z_0 = -i$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}$ den Konvergenzradius 1 hat und dass gilt

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} |f(re^{2\pi i\alpha})| = \infty \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 18. (5 Punkte)
Zeigen Sie: Eine ganze Funktion f ist genau dann ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $|f(z)| \le a + b|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 19. (5 Punkte)
Die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$$

hat den Konvergenzradius 1 . Zeigen Sie, dass die durch diese Potenzreihe dargestellte Funktion $f(z)$ in $U(0, 2/3) = \{ z \in \mathbb{C};\, |z| < 2/3 \}$ injektiv ist.
Hinweis: Schätzen Sie dazu $|f(z) - f(\omega)|$ für $z, \omega \in U(0, 2/3)$ mit $z \neq \omega$ geeignet ab. Benutzen Sie die folgende Identität für $k \geq 2$:

$$z^k - \omega^k = (z - \omega)(z^{k-1} + z^{k-2}\omega + \cdots + z\omega^{k-2} + \omega^{k-1})$$