W. Lütkebohmert
J. Marhenke

19.05.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 6

Abgabe am 24.05.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 20. (5 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Ist $|f|$ konstant, so ist bereits f konstant.

(b) Beweisen Sie das Maximumprinzip mittels der Cauchyschen Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Aufgabe 21. (5 Punkte)

(a) Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion. Beweisen Sie, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis: Wäre die Aussage falsch, so existierten $a \in \mathbb{C}$ und ein positives $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Betrachten Sie nun die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

(b) Es sei f eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass f konstant ist.

Aufgabe 22. (5 Punkte)
Es sei f eine ganze Funktion, so dass zu jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Koeffizient der Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Null ist. Beweisen Sie, dass f ein Polynom ist.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$D_n = \{z \in \mathbb{C}\,;\, f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Zeigen Sie zuerst, dass $\mathbb{C}$ von den Mengen D_n, $n \in \mathbb{N}$, überdeckt wird.

Aufgabe 23. (5 Punkte)
Man zeige am Beipiel der Funktion $\sin z$, dass das Maximumprinzip nicht für unbeschränkte Gebiete gilt.