W. Lütkebohmert
J. Marhenke

24.05.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 7

Abgabe am 02.06.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 24. (5 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Für alle $S > 0$ existiere ein $\rho > 0$, so dass gilt $|f(z)| \geq S$ für alle z mit

$$\min(|z - w|\,;\, w \in \partial G) \leq \rho.$$

Zeigen Sie, dass f nicht holomorph ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass f nur endlich viele Nullstellen hat.

Aufgabe 25. (5 Punkte)
Betrachten Sie das Komplement der logarithmischen Spirale

$$D = \mathbb{C} - \{\, z = e^{t(1+i)}\,;\, t \in \mathbb{R}\,\} - \{0\}.$$

(a) Skizzieren Sie das Gebiet D und untersuchen Sie, ob es einfach zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion besitzt.

(c) Nach (b) existiert ein Logarithmus auf D. Geben Sie den Logarithmus auf D an, der auf dem reellen Intervall $(1, e)$ durch

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

gegeben ist.

Aufgabe 26. (5 Punkte)
Es sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ eine geschlossene Kurve. Weiter sei für $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = z^m$.
Zeigen Sie, dass $\chi(g \circ \alpha, 0) = m \cdot \chi(\alpha, 0)$ gilt.

Aufgabe 27. (5 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$. Man definiert auf der Menge

$$M = \{\gamma : [0,1] \to D\,;\, \text{stetig mit } \gamma(0) = \gamma(1) = z_0\}$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1, \gamma_2 \text{ sind homotop}.$$

Der Quotient $\pi_1(D, z_0) = M/\sim$ heißt *Fundamentalgruppe* von (D, z_0).

(a) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(b) Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in M(z_0)$, so sei $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in M$ der Weg mit

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\circ$ eine Verküpfung auf $\pi_1(D, z_0)$ induziert:

$$\gamma_i \sim \gamma_i', \;\; i = 1, 2 \;\; \Longrightarrow \;\; \gamma_1 \circ \gamma_2 \sim \gamma_1' \circ \gamma_2'$$

(c) Zeigen Sie, dass $\pi_1(D, z_0)$ mit der Verknüpfung aus (b) eine Gruppe ist.

(d) Zeigen Sie für ein Gebiet D:
Es gilt $\pi_1(D, z_0) = \{1\}$ genau dann, wenn D einfach zusammenhängt.

(e) Es seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq z_1$ und $D = \mathbb{C} - \{z_1\}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\pi_1(D, z_0) \simeq \mathbb{Z}.$$