W. Lütkebohmert
J. Marhenke

02.06.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 8

Abgabe am 09.06.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 28. (5 Punkte)

(a) In welchem Sinne gilt $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$?

(b) Welche Fehler stecken in folgendem *falschen Beweis*?

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } e^{ix} = e^{2\pi i x/2\pi} = \left(e^{2\pi i}\right)^{x/2\pi} = 1^{x/2\pi} = 1.$$

(c) Bestimmen Sie alle Werte von i^i , 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$.

Aufgabe 29. (5 Punkte)
Man zeige: Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe und nullstellenfreie Funktion f besitzt genau dann einen auf G holomorphen Logarithmus, wenn f'/f auf G eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 30. (5 Punkte)
Es bezeichne Log den Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sei $0 < \alpha < \beta < \pi$. Ferner seien die Gebiete $G_{\alpha,\beta}(\infty)$ und $G_{\alpha,\beta}(0)$ gegeben durch

$$G_{\alpha,\beta}(\infty) = \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, 1 < |z|,\ \alpha < \arg z < \beta \,\}$$

$$G_{\alpha,\beta}(0) = \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |z| < 1,\ \alpha < \arg z < \beta \,\}.$$

(a) Beschreiben Sie $\operatorname{Log}(G)$ für $G = G_{\alpha,\beta}(\infty)$ und $G = G_{\alpha,\beta}(0)$.

(b) Beschreiben Sie $\sqrt{G}$ für $G = G_{\alpha,\beta}(\infty)$ und $G = G_{\alpha,\beta}(0)$, wobei

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$$

ist.

Aufgabe 31. (5 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ ein Gebiet, auf dem kein Zweig des Logarithmus existiert.

(a) Machen Sie plausibel, dass ein Weg $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\chi(\gamma, 0) = 1$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $m \geq 2$ es keinen Zweig der m -ten Wurzel auf G geben kann.

Hinweis: Es sei γ der Weg aus (a) und f ein Zweig der m -ten Wurzel. Berechnen Sie nun die Umlaufzahl $\chi(f \circ \gamma, 0)$.