W. Lütkebohmert
J. Marhenke

09.06.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 9

Abgabe am 16.06.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 32. (4 Punkte)
Man berechne die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

(a) $\dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ für $1 < |z| < 2$

(b) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ für $1 < |z-1| < 2$

Aufgabe 33. (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Laurentreihen:

(a) $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}\, z^n$

(b) $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{3^n+1}$

Aufgabe 34. (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f und Punkte z_0 die Art der Singularität. Bestimmen Sie ferner bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von f und geben Sie für Pole den Hauptteil an.

(a) $(z^3+3z+2i)/(z^2+1)\ , \qquad z_0 = -i$

(b) $1/(1-e^z)\ , \qquad z_0 = 0$

(c) $(\cos z - 1)/z^4\ , \qquad z_0 = 0$

(d) $\sin(\pi/(z^2+1))\ , \qquad z_0 = i$

Aufgabe 35. (4 Punkte)
Es sei z_0 wesentliche Singularität von f. Man zeige

$$\lim_{r\to 0} r^k M(r) = +\infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Dabei ist $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z-z_0| = r\}$ gesetzt.

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Die Funktionen $a_1, \ldots, a_n$ seien in einer Umgebung eines Punktes z_0 holomorph, f habe eine wesentliche Singularität in z_0. Man zeige, dass $g = f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n$ in z_0 eine wesentliche Singularität hat. Man zeige weiter, dass diese Aussage auch richtig ist, wenn einige der a_ν Pole in z_0 haben.