W. Lütkebohmert
J. Marhenke

16.06.2005
SS 2005

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Blatt 10

Abgabe am 23.06.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 37. (9 Punkte)
Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

(a) $z^2/(1+z)^3$ (b) $1/(z^2+1)^3$

(c) $e^z/(z-1)^2$ (d) $z \cdot e^{1/(1-z)}$

(e) $1/[(z^2+1)(z-1)^2]$ (f) $1/\sin(\pi z)$

Aufgabe 38. (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Residuen:

(a) $\mathrm{Res}_0\left(\dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}\right)$ (b) $\mathrm{Res}_0((\sin 2z - 2\sin z)/(\sin z(\sin z - z))$

(c) $\mathrm{Res}_0((\tan z - z)/(1-\cos z)^2)$ (d) $\mathrm{Res}_0((z-1)/\log z + 1)$

(e) $\mathrm{Res}_1(z/(1-\sqrt{2-z}))$ (f) $\mathrm{Res}_0((1-\cos z)/z^3)$

Hierbei ist in (d) $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus und in (e) $\sqrt{\cdot}$ in der Nähe von 1 der Zweig der Quadratwurzel mit $\sqrt{1} = 1$.

Aufgabe 39. (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist f auf dem Gebiet G meromorph und nicht konstant, so ist $f(G)$ offen in $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Es sei $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ und f auf $U - \{z_0\}$ meromorph. Zeigen Sie: Ist z_0 Häufungspunkt von Polen von f , so gibt es zu jedem $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge (z_ν) in $U - \{z_0\}$ mit $\lim z_\nu = z_0$ und $\lim f(z_\nu) = w$.