# Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Im Folgenden sei stets $\mathbb{E} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ .

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)
Überprüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}\,\mathrm{Im}\, z$ komplex differenzierbar ist.

**Aufgabe 2.** (4+8 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma |z|\, dz,$$

mit $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = it$ .

(b) Berechnen Sie das folgende Integral.

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z^3-1)}\, dz$$

**Aufgabe 3.** (4+6 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)}.$$

Geben Sie den Konvergenzradius der Taylorentwicklung der Funktion $g(z)$ in dem Punkt $2+2i \in \mathbb{C}$ an.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^n.$$

**Aufgabe 4.** (8 Punkte)
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right)$$

jeweils in eine Laurentreihe, die auf den Ringgebieten $U(0,0,1)$ und $U(0,1,2)$ konvergiert.

**Aufgabe 5.** (8 Punkte)
Gegeben seien eine ganze Funktion $f$ und eine Funktion $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(1/z)$ .
Zeigen Sie:
Genau dann hat $g$ in $0$ eine wesentliche Singularität, wenn $f$ kein Polynom ist.

**Aufgabe 6.** (10+10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$

(b) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx$$

**Aufgabe 7.** (10 Punkte)
Es bezeichne $\bar{\mathbb{E}} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$ . Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht konstant ist.
Zeigen Sie:
Ist $f(D) \subset \bar{\mathbb{E}}$ , so gilt sogar $f(D) \subset \mathbb{E}$ .

**Aufgabe 8.** (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Es bezeichne

$$M_f(r) := \max \{ |f(z)| : |z| = r \} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < 1.$$

Zeigen Sie:
Die Funktion $M_f : [0,1) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

**Aufgabe 9.** (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von

$$g(z) = z^4 + 6z + 3$$

in dem Gebiet $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \}$.

**Aufgabe 10.** (10 Punkte)
Sei $f$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist.