Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie – Lösung 1

Aufgabe 1.

(a) $(1-i)^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{7}{4}\pi i n}$. Es ist

$n \mod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{Re}((1-i)^n)$	$(\sqrt{2})^n$	$(\sqrt{2})^{n-1}$	0	$-(\sqrt{2})^{n-1}$	$-(\sqrt{2})^n$	$-(\sqrt{2})^{n-1}$	0	$(\sqrt{2})^{n-1}$
$\mathrm{Im}((1-i)^n)$	0	$-(\sqrt{2})^{n-1}$	$-(\sqrt{2})^n$	$-(\sqrt{2})^{n-1}$	0	$(\sqrt{2})^{n-1}$	$(\sqrt{2})^n$	$(\sqrt{2})^{n-1}$

Ferner gilt $|(1-i)^n| = (\sqrt{2})^n$ und $\arg((1-i)^n) = \frac{7}{4}\pi n$.

(b) $z := \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} - \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} = -2i$, folglich ist $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -2$, $|z| = 2$ und $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi$.

(c) geht mit (d)

(d) $\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1-a^2+2ia}{1+a^2}$, also $\mathrm{Re}(\frac{1+ia}{1-ia}) = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\mathrm{Im}(\frac{1+ia}{1-ia}) = \frac{2a}{1+a^2}$, $\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$ und $\arg(\frac{1+ia}{1-ia}) = \arctan(\frac{2a}{1-a^2})$.

(e) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ ist eine primitive 8 -te Einheitswurzel. Daher ist $\sum_{\nu=0}^{7} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^\nu = 0$.

(f) Es ist $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ und somit $\mathrm{Re}(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n) = \cos(\frac{n}{3}\pi)$, $\mathrm{Im}(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n) = \sin(\frac{n}{3}\pi)$, $\left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right| = 1$ und $\arg(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n) = \frac{n}{3}\pi$.

Aufgabe 2.

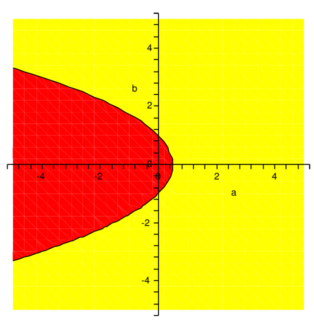
(a) $M_1 = \{\, a+bi \mid -\sqrt{1-2a} < b < \sqrt{1-2a} \,\}$

(b) $M_2 = \{\, a+bi \mid b = -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - a^2} \,\}$

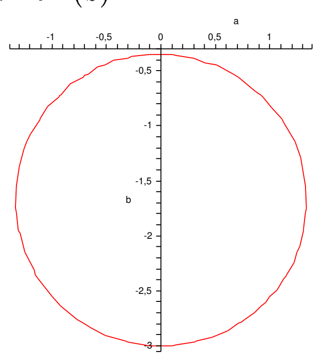
(c) $M_3 = \{\, a+bi \mid a = 1 \pm \sqrt{1-b^2},\ (a,b) \neq (0,0) \,\}$

(d) $M_4 = \{\, z_1 + iz_2 \mid z_1 > 0 \,\}$

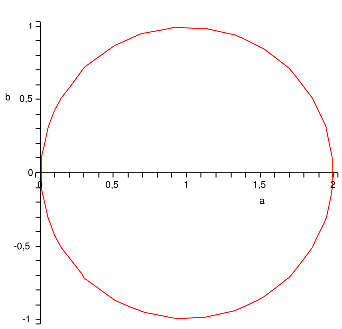
Zu Teil (a):



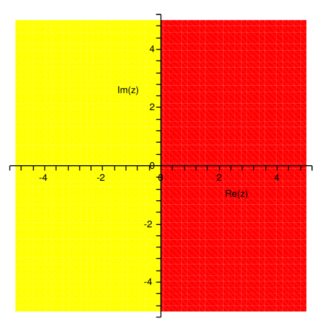
Zu Teil (b)



Zu Teil (c):



Zu Teil (d)



Aufgabe 3.
" $\Rightarrow$ " Sei φ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und sei $\varphi(1) = x - iy$. Wegen der Linearität ist dann $\varphi(i) = i\varphi(1) = i(x - iy) = y + ix$.
" $\Leftarrow$ " Sei $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ und $z = z_1 + iz_2$. Zu zeigen ist dann $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\varphi(\lambda z) = \varphi((\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) + i(\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2)) = (1, i) \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 \\ \lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 z_1 x - \lambda_2 z_2 x + \lambda_2 z_1 y + \lambda_1 z_2 y + i(\lambda_2 z_2 y - \lambda_1 z_1 y + \lambda_2 z_1 x + \lambda_1 z_2 x)$$

$$= (\lambda_1 + i\lambda_2) \cdot (1, i) \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(z)$$

Aufgabe 4.
$S^1 = \{ z \in \mathbb{C};\ |z| = 1 \} = \{ e^{r2\pi i} \mid r \in \mathbb{R} \}$, also gilt $\xi = e^{r_0 2\pi i}$ für ein $r_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zwei Fälle:

(1) Ist $r_0 \in \mathbb{Q}$, so ist $r_0 = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$. Folglich ist $\xi^q = e^{2p\pi i} = 1$, woraus man folgert, dass M endlich ist.

(2) Ist $r_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, so kann man die folgenden Mengen betrachten:

$$R_{n,\nu} = \left\{ k + \left(\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ und}$$

$$R_n = \bigcup_{0 \le \nu < |n|} R_{n,\nu}$$

Wegen $r_0 \notin \mathbb{Q}$ gilt $\{ \mu r_0 \mid \mu \in \mathbb{Z} \} \subset R_n$. Da für gegebenes n nur endlich viele Mengen $R_{n,\nu}$ existieren, gibt es $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$ und $\mu_1 r_0, \mu_2 r_0 \in R_{n,\nu}$. Damit gilt $(\mu_1 - \mu_2) r_0 = k + \epsilon$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Wir erhalten

$$\xi^{(\mu_1 - \mu_2)} = e^{2\pi i(k+\epsilon)} = e^{2\pi i \epsilon}.$$

Sei $\zeta = e^{s2\pi i} \in S^1$ beliebig und sei $m = \left[\frac{s}{\epsilon}\right]$. Dann gilt

$$\left| \xi^{m(\mu_1 - \mu_2)} - \zeta \right| < \epsilon 2\pi$$

und folglich liegt M dicht in S^1.