Aufgabe 5.
Wir überprüfen die Aussage mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dabei ist $u(x,y) = x^3y^2$ und $v(x,y) = x^2y^3$.
Es gilt stets

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v = 3x^2y^2.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial y}u = 2x^3y \text{ und } -\frac{\partial}{\partial x}v = -2xy^3.$$

Somit sind die CR-Dgl. erfüllt, falls $2x^3y = -2xy^3 \iff xy(x^2+y^2) = 0$. Dies ist der Fall für $x = 0$ oder $y = 0$. Insbesondere gibt es keine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, auf der f komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 6.

(a) $z = x + iy$
$f(z) = f(x+iy) = x^2 + ixy = u + iv$
$u_x = 2x \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad v_x = y \quad , \quad v_y = x$
CR-Dgl: $u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$
$2x = x \quad , \quad 0 = x \Rightarrow x, y = 0$
f ist ferner überall (auf $\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$ -differenzierbar und genau in 0 komplex differenzierbar.

(b) $f(z) = \overline{z} = x - iy = u + iv$
$u_x = 1 \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = -1$
CR-Dgl: $1 = -1 \quad , \quad 0 = 0$
f ist nirgendwo komplex differenzierbar, jedoch ist f überall $\mathbb{R}$ -differenzierbar.

(c) $f(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2 = u + iv$
$u_x = 2x \quad , \quad u_y = 2y \quad , \quad v_x = v_y = 0$
CR-Dgl: $2x = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$
f ist überall $\mathbb{R}$ -differenzierbar und genau in 0 komplex differenzierbar.

(d) $$f(z) = \frac{z}{\overline{z}}, \; z \neq 0$$

$$f(z) = \frac{x^2 + 2ixy - y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2} = u + iv$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\
u_y &= \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \\
v_x &= 2\,\frac{-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
v_y &= 2\,\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

CR-Dgl:

$$
\begin{aligned}
u_x = v_y \quad &\Leftrightarrow \quad 4xy^2 = 2x(x^2 - y^2) \\
&\Leftrightarrow \quad x(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = 0 \\
u_y = -v_x \quad &\Longleftrightarrow \quad -4yx^2 = 2y(x^2 - y^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\underline{\text{Einsetzen}} & \underline{x = 0}: & y^3 = 0 \Rightarrow y = x = 0 \\
& \underline{x = \sqrt{3}y}: & 8y^3 = 0 \Rightarrow y = x = 0 \\
& \underline{x = -\sqrt{3}y}: & -8y^3 = 0 \Rightarrow y = x = 0
\end{array}
$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind für keinen Punkt im Definitionsbereich erfüllt und folglich ist f nirgendwo komplex differenzierbar, jedoch ist f überall $(z \neq 0)$ $\mathbb{R}$-differenzierbar.

Aufgabe 7.

$g(x + iy) = \overline{f(x - iy)} = u(x - iy) - iv(x - iy)$, wenn $f = u + iv$ ist.
Schreibt man weiterhin $g = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, so lauten die **CR-Dgl:** $\widetilde{u}_x = \widetilde{v}_y$ und $\widetilde{u}_y = -\widetilde{v}_x$.
Es gilt $\widetilde{u}(x, y) = u(x, -y)$ und $\widetilde{v}(x, y) = -v(x, -y)$ und daher gilt mit $a = a_1 + ia_2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}(a_1, -a_2) = \frac{\partial}{\partial x}u(a_1, a_2) = \frac{\partial}{\partial y}v(a_1, a_2) = \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{v}(a_1, -a_2)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{u}(a_1, -a_2) = -\frac{\partial}{\partial y}u(a_1, a_2) = \frac{\partial}{\partial x}v(a_1, a_2) = -\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{v}(a_1, -a_2).$$

Damit ist g in $\bar{a}$ komplex differenzierbar.

Aufgabe 8.

(a) Es gelten die CR-Dgl, daher ist $u_{xx} = v_{yx}$ und $u_{yy} = -v_{xy}$. Wegen $u \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ ist nach dem Satz von Hesse aber $v_{yx} = v_{xy}$ und somit $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ Analoges beweist man für v .

(b) Man überprüft die **CR-Dgl:**

(i)
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x}\, u(x, t)\, dt + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}\, u(t, y_0)\, dt}_{=0} = \frac{\partial}{\partial x}\, u(x, y)$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x}\, u(x, t)\, dt + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}\, u(t, y_0)\, dt \\
&= \Big(\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\, u(x, t)\, dt\Big) - \frac{\partial}{\partial y}u(x, y_0) \\
&= -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\, u(x, t)\, dt - \frac{\partial}{\partial y}\, u(x, y_0) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\, u(x, y)
\end{aligned}
$$

(c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ Sei nun $x_0 = y_0 = 0$. Mit (b) erhält man:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\, u(t, 0)\, dt \quad &= \quad -\int_{x_0}^{x} 0\, dt \quad = \quad 0 \quad \text{und} \\
\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\, u(x, t)\, dt \quad &= \quad \int_0^y 3x^2 - 3t^2\, dt \quad = \quad 3x^2y - y^3
\end{aligned}
$$

und folglich $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 1 + i(3x^2y - y^3) = z^3 + 1.$