Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie - Lösung 3

Aufgabe 9.

Bild von α:

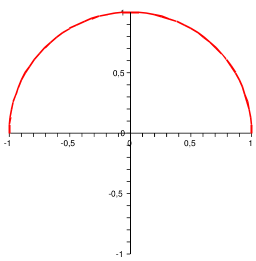
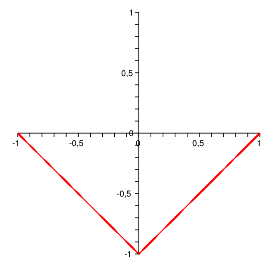


Bild von β:



Es gilt

$$\int_\alpha \frac{1}{z}\,dz = \int_0^\pi e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt = \pi i$$

und

$$\int_\beta \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{(1-t)+it}{(1-t)^2+t^2}\cdot(-1-i)\,dt + \int_1^2 \frac{(1-t)-i(t-2)}{(1-t)^2+(t-2)^2}\cdot(i-1)\,dt = -\pi i$$

Aufgabe 10.

(a) Man definiert zum Beispiel $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\, t \mapsto t+it$ und erhält

$$\int_\gamma \bar{z}^2\,dz = \int_0^1 (t-it)^2\cdot(1+i)\,dt = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$$

(b) Man schreibt $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C},\, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C},\, t \mapsto 1+it$. Dann erhält man

$$\int_\gamma \bar{z}^2\,dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}^2\,dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}^2\,dz = \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1-ti)^2\cdot i\,dt = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$$

(c) Hier ist $\int_\gamma ze^{z^2}\,dz = 0$, weil $\frac{1}{2}e^{z^2}$ eine Stammfunktion ist.

Aufgabe 11.

Nach Definition ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt.$$

Für dieses Integral gilt:

Für jedes $\epsilon_1 > 0$ existiert ein $\delta_1 > 0$, sodass für $\{a_0, \dots, a_N\}$ und $\{c_1, \dots, c_N\}$ wie in der Formulierung der Aussage das Folgende gilt:

$$\left| \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) - \sum_{i=1}^N f(\alpha(c_i))\alpha'(c_i)(a_i - a_{i-1}) \right| < \epsilon_1.$$

Die nächste Aussage werden wir weiter unten noch beweisen. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\epsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$ existiert, sodass für alle $s, t, \xi \in [a,b]$ mit $s \leq \xi \leq t$ und $t - s < \delta_2$ gilt

$$\big|(\alpha(t) - \alpha(s)) - (t-s)\alpha'(x)\big| < \epsilon_2.$$

Damit erhalten wir aus obiger Abschätzung:

$$\left| \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt - \sum_{i=1}^N f(\alpha(c_i))(\alpha(a_i) - \alpha(a_{i-1})) \right| < \epsilon_1 + M\epsilon_2,$$

wobei M definiert sei als $M = \sup\{\,|f(\alpha(s))|\,;\, s \in [a,b]\,\} < \infty$.

Zum Beweis der Hilfsaussage definiert man die Funktion

$$\varphi \,:\, [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C},\ (s,t) \mapsto \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t-s},\ s \neq t$$

und $\varphi(s,s) = \alpha'(s)$.

Man kann dann zeigen, dass φ stetig ist. Somit ist φ auch gleichmäßig stetig. Folglich gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $(s,t), (s',t') \in [a,b] \times [a,b]$ mit $\max\{\,|s - s'|, |t - t'|\,\} < \delta$ gilt

$$|\varphi(s,t) - \varphi(s',t')| < \epsilon.$$

Wählt man speziell $s, t, \xi \in [a,b]$ mit $s \leq \xi \leq t$ und $0 < t - s < \delta \leq 1$, so folgt

$$|\varphi(s,t) - \varphi(\xi,\xi)| < \epsilon.$$

Dies bedeutet aber gerade

$$\left| \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t-s} - \alpha'(\xi) \right| < \epsilon.$$

Schließlich folgt daraus

$$|(\alpha(t) - \alpha(s)) - \alpha'(\xi)|t - s|| < \epsilon|t - s|.$$